*МИНИСТ�.1-СТНО ОН.1-АЗОНАНИН И НАУКИ .1-ОССИЙСКОЙ Ф�,LJ�.1-АЦИИ МОСКОНСКИЙ ФИЗИКО-Т�ХНИч�СКИЙ ИНСТИТУТ*

*('ОСУ,LJА.1-СТН�ННЫЙ УНИН�.1-СИТ�Т)*

*ЛБРТОБЫТОКИУ IОБ Ы*

*IТ ТРФЗУ Е З В трех томах*

*Рекомендовано У'Чебно-методи'Ческим об7единением Московского физико-техни'Ческого института (государственного университета)*

*в ка'Честве у'Чебного пособи.я*

*дл.я студентов высших у'Чебных заведений*

*по направлению «Прикладные математика и физика»*

*Том* *1*

*М е х а н и к а*

## *Пu,ц ре,цакцией* нрuф. А.Д. ГЛАДУНА

*MOCKl:A MФТИ 2012*

*.1.1K 22.3 УДK 31*

*l12*

*А в т о р ы:*

*А.Д. Гладун, Д.А. Александров, Ф.Ф. Игошин, П.Ф. Коротков,* В.П. Корявов, А.П. Овчинников, Ю.А. Самарский, А.А. Теврюков, Г.Н. Фрейберг

*Л12*

*Р е ц е н з е н т ы:*

*Кафедра общей физики Московского авиационного института (государственного технического университета)*

*Доктор физико-математических наук, профессор А.В. Степанов*

*Доктор физико-математических наук А.В. Шелагин*

*Лабuратuрный нрактикум нu uбщей физике: Учебное пособие. В трех томах. Т. 1. Механика. 2-е изд., испр. / А.Д. Гладун, Д.А. Александров, Ф.Ф. Игошин и др.; Под ред. А.Д. Гладуна. - М.: МФТИ, 2012. - 316 с.*

*ISBN 5-7417-0459-2*

*Представлены лабораторные работы по механике для студентов I курса (1-го семестра) МФТИ. Работы распределены по ключевым разделам курса общей физики. Каждый раздел содержит теоретическое введение по рассмат- риваемому кругу физических явлений. В начале книги приведены рекомен- дации по обработке результатов измерений и примеры отчета о выполненной работе. Теоретические введения и описания составлены с таким расчетом, чтобы студент мог получить ясное представление о лабораторной работе и изучаемом явлении и в том случае, когда выполнение работы опережает тео- ретический курс.*

*Книга снабжена необходимым справочным материалом.*

*Для физических, инженерно-физических и физико-технических специ- альностей вузов.*

*Табл. 56. Ил. 88.*

*ISBN 5-7417-0453-0 (Т. 1)*

*ISBN 5-7417-0459-2*

*УДК 531*

О*с Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Mосковский физико-технический институт*

*(государственный университет), 2012*

О*с 'ладун A.Д., Aлександров Д.A., Игошин Ф.Ф., Kоротков 11.Ф., Kорявов l:.11., Oвчинников A.11., Cамарский Ю.A., Теврюков A.A., Фрейберг '.Н., 2012*

# *ПРЕДИСЛОВИЕ*

*Предлагаемое учебное пособие представляет собой руководство к вы-* полнению лабораторных работ по общей физике для студентов перво- го курса (первого семестра) МФТИ. В соответствии с учебным планом института работы посвящены физическим основам механики. Совер- шенствование <Руководства к лабораторным занятиям> является тра- диционно одной из важнейших задач кафедры общей физики МФТИ. Предыдущие варианты Руководства выходили в 1964, 1973, 1983 го- дах. С момента последнего издания, однако, прошло уже 20 лет. За это время существенно обновился состав работ, изменились взгляды ка- федры на объем и содержание лабораторного практикума. Поставлены новые работы, модернизованы существующие, в лабораториях кафед- ры используются современные приборы и электронно-вычислительная техника. Сама книга стала библиографической редкостью. Возникла необходимость в переиздании пособия, значительно переработанного как по содержанию, так и по структуре.

*В данной книге работы распределены по ключевым разделам курса.* Каждый раздел начинается кратким обзором теоретических представ- лений по выбранному кругу физических задач. Обзоры не дублируют соответствующие разделы учебников. Они содержат фундаментальные принципы, лежащие в основе рассматриваемых физических явлений, основные формулы и их качественный анализ. Как теоретические обзо- ры, так и изложение существа лабораторных работ составлены с таким расчетом, чтобы студент мог получить ясное представление об изуча- емом явлении даже в том случае, если выполнение работы опережает теоретический курс.

*С первых занятий в лаборатории студент учится работать с прибо-* рами. Он должен иметь представление об устройстве и принципе дей- ствия используемых приборов, вовремя замечать их неисправность.

*Авторы старались сохранить четкость постановки эксперименталь-* ных задач, показать студенту, как он должен следить за правильно-

*4 ПРЕДИСЛОВИЕ*

*стью настройки и работы аппаратуры. Использование ЭВМ не должно* затмевать сути изучаемых явлений.

*Важнейшая задача, которую всегда приходится решать эксперимен-* татору, состоит в том, как получить наилучшие значения измеряемых величин и как правильно оценить степень их достоверности. Широ- кое внедрение компьютерных методов обработки экспериментальных данных сделало эту задачу особенно актуальной. Прежде чем обра- батывать результаты современными методами, студент должен уметь быстро и грамотно от руки построить необходимые графики, которые покажут ему, правильно ли работала аппаратура, разумно ли выбран диапазон измерений и т. д.

*Все это отображено в предлагаемом <Лабораторном практикуме по* общей физике>.

*Настоящее издание является продолжением трех предыдущих.* В связи с этим следует отметить большую роль в становлении физиче- ского практикума МФТИ его основателя К.А. Рогозинского и профес- сора Л.Л. Гольдина, который в течение многих лет был бессменным редактором книги.

*Высокий научный и методический уровень лабораторных работ яв-* ляется результатом большой работы всего коллектива кафедры общей физики МФТИ. Несмотря на то, что во многих случаях конкретные ра- боты имеют определенных авторов, предложивших или поставивших их впервые, они являются фактически плодом многолетнего труда всей кафедры. Авторы книги взяли на себя лишь скромный труд по систе- матизации и обобщению уникального опыта преподавателей кафедры. Мы признательны кафедре физики МАИ(ГТУ), а также профессо- ру А.В. Степанову и д.ф.-м.н. А.В. Шелагину, взявшим на себя труд по рецензированию книги. Высказанные ими замечания были учтены

*при окончательном редактировании лабораторного практикума.*

# *ВВЕДЕНИЕ*

*Физика - наблюдательная и экспериментальная наука. Принято* считать, что эксперимент в физике является высшим судьей, если тео- ретическое предсказание вступает в противоречие с экспериментальны- ми фактами, то без какой-либо апелляции вся вина ложится на теорию. Можно видеть, что это не совсем так. Существует немало физических теорий, которые <выжили>, несмотря на противоречащие им эмпири- ческие факты. Приведем один пример.

*Как известно, эйнштейновская теория броуновского движения ока-* залась решающей в обосновании атомистической теории строения ве- щества, так как она подтверждалась блестящими экспериментами Ж. Перрена (Perrin). Эта теория, однако, опровергалась не менее бле- стящими опытами В. Анри (Henri). В чем дело? Почему подтверждение Перрена оказалось более важным, чем опровержение Анри?

*Потому что любая теория, прежде чем подвергнуться эмпириче-* ской проверке, проходит целый комплекс неэмпирических испытаний. Теория должна быть логически непротиворечивой, совместимой с дру- гими, ранее принятыми теориями, соответствовать общепринятой фи- лософии науки - быть простой, красивой и т. д. Эйнштейновская тео- рия броуновского движения была принята, в частности, потому что она объясняла броуновское движение, согласовывалась с кинетической тео- рией газов и химическими представлениями об атомах. А что же опы- ты Анри? Как выяснилось впоследствии, они были просто неправильно истолкованы.

*Таким образом, для принятия научной теории соответствие экс-* периментальным фактам является необходимым, но не достаточным условием. Это обстоятельство всегда имеется в виду при корректном сопоставлении теоретических и экспериментальных результатов.

*Физика - не только экспериментальная, но и теоретическая наука.* Ее язык - это язык математики. Математика играет двоякую роль: не только обеспечивает физику вычислительным аппаратом, но и форми-

*6 ВВЕДЕНИЕ*

*рует ее понятия. Математические понятия представляют самую суть* физических идей. Без математического понятия производной нет фи- зического понятия скорости. Без дифференциальных уравнений нет законов движения классической механики. Без операторных уравне- ний нет законов квантовой теории. Каждый символ, встречающийся в физической теории, имеет математическое значение. Несмотря на то, что многие математические идеи были стимулированы физическими исследованиями, математика является автономной научной дисципли- ной. Возникает вопрос: почему оказывается возможным для описания физической реальности использование достижений чистой математи- ки?

*Это обусловлено тем, что математика изучает, по существу, чрезвы-* чайно общие и достаточно четкие модели окружающей действительно- сти. Математика - особый способ познания мира, которым физика широко пользуется, физика поэтому может служить идеалом для лю- бой развитой системы научного знания.

*Преподавание физики является моделью процесса научного позна-* ния, что определяет место и значение эксперимента в курсе общей фи- зики. Основателем экспериментального метода следует считать Гали- лео Галилея. Однако мы не обязаны ему введением эксперимента как средства исследования: применение эксперимента не прекращается с античности до наших дней. Мы обязаны Галилею методологической концепцией, которой следует, порой бессознательно, современный фи- зик-исследователь.

*\_lис. 1*

*Задача физики, по Галилею, -* придумать эксперимент, повторив его несколько раз, исключив или умень- шив влияние возмущающих факто- ров, уловить в неточных экспери- ментальных данных математические законы, связывающие величины, ха- рактеризующие явление, предусмот- реть новые экспериментальные под- тверждения - в пределах экспери-

*ментальных возможностей - сформулированных законов, а достигнув* подтверждения, идти дальше с помощью дедуктивного метода и найти новые следствия из этих законов, в свою очередь подлежащие провер- ке. Это и есть так называемое физическое мышление.

*Наблюдение, рабочая гипотеза, математическая разработка и опыт-* ная проверка - таковы, по Галилею, четыре фазы исследования явле- ний природы, которое начинается с опыта и к нему возвращается, но не может развиваться без обращения к математике.

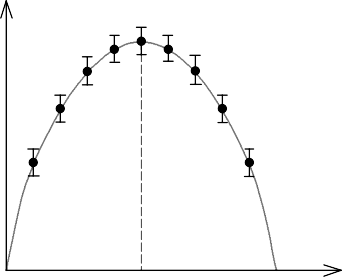
*ВВЕДЕНИЕ* *7*

*Рассмотрим простой, но поучи-* тельный пример. Пусть в нашем рас- поряжении имеется набор кусков од- нородной жести (картона, фанеры и т. п.), форма которых представлена на рис. 1.

*Будем считать также, что мы рас-* полагаем приборами для измерения массы, длины и величины углов, т. е. весами, линейкой и транспортиром.

*Взвешивая достаточно большое* количество таких кусков жести, вы- резанных из одного и того же листа,

f(a)

0°

45°

*\_lис. 2*

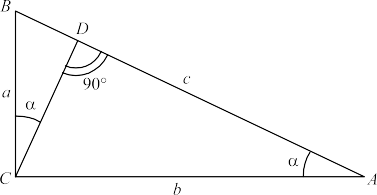
90° a

*можно убедиться в том, что для массы куска жести (ABC) имеет место*

*эмпирическое соотношение:*

*MABC* = *c*2*f* (*α*)*,*

*где f* (*α*) *- некоторая универсальная функция, имеющая вид, представ-* ленный на рис. 2.

*Разрежем кусок жести (ABC)* на две части так, как показано на рис. 3. Экспериментально убеждаем- ся в том, что ∠*BCD* = ∠*BAC. В силу* предыдущего можно видеть, что

*MCBD* = *a*2*f* (*α*)*, MACD* = *b*2*f* (*α*)*.*

*Путем взвешивания проверяем адди-*

*тивность массы:*

*MABC* = *MCBD* + *MACD.*

*\_lис. 3*

*Пользуясь предполагаемой универсальностью функции f* (*α*)*, отсюда* находим

*c*2 = *a*2 + *b*2*.*

*Полученное соотношение подвергаем дальнейшей эксперименталь-* ной проверке и убеждаемся в том, что мы добыли новое теоретическое знание.

*Противоречит ли полученный нами результат соотношениям евкли-* довой геометрии? Конечно, нет. В самом деле, можно видеть, что

*MABC* = *ρhSABC,*

*где ρ - плотность материала жести, h - толщина куска жести, SABC -*

*8 ВВЕДЕНИЕ*

*площадь треугольника ABC. Очевидно, что*

*S* = 1 *ab* = 1 *c*2 sin *α* cos *α* = 1 *c*2 sin 2*α,*

*т. е.*

*ABC*

##### 2 2

*f* (*α*) =

##### 4

1

*ρh* sin 2*α.*

##### 4

*Рассмотренный пример является, на наш взгляд, яркой иллюстра-* цией экспериментального метода Галилея. Удивительно, что, исполь- зуя измерительные приборы и процедуры, обладающие достаточно большими погрешностями, а также ограниченное количество кусков жести, мы получаем точное математическое соотношение (теорему Пи- фагора). Как говорил А. Эйнштейн, непостижимо то, что окружающий нас мир познаваем.

*Главная задача лабораторного практикума по физике - способ-* ствовать освоению современного стиля физического мышления. Здесь преследуются две цели. С одной стороны, студент должен научиться самостоятельно воспроизводить и анализировать простейшие физиче- ские явления. С другой стороны, он получает при этом элементарные навыки работы в физической лаборатории, знакомится с современной научной аппаратурой.

*Работающий в лаборатории должен стремиться к тому, чтобы* знать:

* *основные физические явления;*
* *фундаментальные понятия, законы и теории классической и совре- менной физики;*
* *численные порядки величин, характерные для различных разделов физики;*
* *методы физического исследования и уметь:*
* *абстрагироваться от несущественного, моделировать реальные физи- ческие ситуации;*
* *делать правильные выводы из сопоставления результатов теории и эксперимента;*
* *находить безразмерные параметры, определяющие данное явление;*
* *производить численные оценки по порядку величины;*
* *делать качественные выводы при переходе к предельным условиям;*
* *обеспечить достоверность полученных результатов;*
* *видеть в технических задачах физическое содержание.*

*К выполнению лабораторной работы необходимо относиться как к* небольшому научному исследованию. Склонность к сомнениям и пере- проверкам является ценнейшим качеством любого исследователя. Мы надеемся, что наш практикум поможет развить это качество.

*здл*

# *ИЗМЕРЕНИЯ В ФИЗИКЕ*

### *Эталоны физических величин*

*ЧисJuнuе значение физическuй неJичины. Мы говорим, что ве-* личина *x измерена, если известно, сколько раз в x содержится неко-* торая единица. Это и есть числовое значение *x величины x. Если* обозначить через [*x*] *единицу величины x (единица времени 1 секунда,* единица силы электрического тока 1 ампер), то при этом

{ }

*x*

{*x*} = [*x*] *. (1.1)*

*Пусть, например, сила тока i* = 10 *А, это значит, что x* = 10*,*

{ }

[*i*] = 1 *А. Соотношение (1.1) можно записать в виде*

*x* = {*x*}[*x*]*. (1.2)*

*При уменьшении единицы измерения в α раз:*

##### 1

[*x*] → [*X*] = *α* [*x*]*,* {*x*} → {*X*} = *α*{*x*}*.*

*Сама физическая величина при этом не изменяется, поскольку*

*x* = {*x*}[*x*] = {*X*}[*X*]*. (1.3)*

*Слишком высокие или слишком низкие порядки числовых (часто* говорят численных) значений неудобны в употреблении. Для того что- бы избежать этого неудобства, вводят новые разряды единиц и при-

*сваивают им имя, используя старое с добавлением соответствующей* приставки, например, 1 *мм*3 = 1 (10−3 *м*)3 = 10−9 *м*3*. В таблице 1 при-* ведены официально принятые приставки десятичного деления единиц.

·

*Т а б л и ц а* *1*

## *ОфициаJьнu нриннтые нристанки ,цеснтичнu'u*

*,цеJенин е,циниц*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Приставка* | *Обозначение* | | *Показатель*  *степени десяти* |
| *Латинское* | *Кириллица* |
| *экса* | *Е* | *Э* | *18* |
| *пета* | *P* | *П* | *15* |
| *тера* | *т* | *Т* | *12* |
| *гига* | *G* | *Г* | *9* |
| *мега* | *м* | *М* | *6* |
| *кило* | *k* | *к* | *3* |
| *гекто* | *h* | *г* | *2* |
| *дека* | *da* | *да* | *1* |
| *деци* | *d* | *д* | −1 |
| *санти* | *с* | *с* | −2 |
| *милли* | *m* | *м* | −3 |
| *микро* | *µ* | *мк* | −6 |
| *нано* | *n* | *н* | −9 |
| *пико* | *р* | *п* | −12 |
| *фемто* |  | *ф* | −15 |
| *атто* | *a* | *а* | −18 |

*Существенно при этом, чтобы не использовались удвоенные или* многократные приставки. Например, вместо 1 мкмкФ следует писать

*1 пФ.*

*Размернuсть. Для каждой физической величины можно в принци-* пе установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Это привело бы, однако, к тому, что в уравнениях, выражаю- щих физические законы, появилось бы множество численных коэффи- циентов. Уравнения становились бы необозримыми, формулы - слиш- ком сложными. Чтобы избежать этого, в физике уже давно отказались от независимого выбора единиц всех физических величин и стали при- менять системы единиц, построенные по определенному принципу, ко- торый состоит в следующем. Некоторые физические величины прини- маются за базисные, т. е. такие, для которых единицы устанавливаются

*произвольно и независимо. Так, например, в механике применяется си-* стема (*l, m, t), в которой за базисные величины принимаются длина* (*l), масса (m) и время (t). Выбор базисных величин и их число произ-* вольны. Это вопрос соглашения. В официально принятой международ- ной системе СИ в качестве базисных приняты девять величин: длина, масса, время, сила электрического тока, температура, сила света, коли-

*чество вещества, плоский угол, телесный угол. Величины, не являющи-* еся базисными, называются производными. Для производных величин единицы устанавливаются на основе формул, служащих их определе- нием. Предполагается, что коэффициенты, входящие в эти формулы, должны быть равными заранее выбранным значениям. Например, ско-

*рость v равномерно движущейся материальной точки пропорциональ-* на пройденному пути *s и обратно пропорциональна времени t, затрачи-*

*ваемому на прохождение этого пути. При независимом выборе единиц*

*s, t и v следует писать:*

*s*

*v* = *k , t*

*где k - численный коэффициент, значение которого определяется вы-* бором единиц. Для простоты полагают *k* = 1 *и s* = *vt. Если за базисные* величины принять путь *s и время t, то скорость становится величиной* производной. За единицу скорости мы обязаны принять скорость та- кого равномерного движения, когда за единицу времени проходится единица длины. Говорят, что скорость имеет размерность длины, де-

*ленной на время. Символически это можно записать так:*

dim *v* = *lt*−1*.*

*Аналогично для ускорения a и силы F имеем*

dim *a* = *lt*−2*,* dim *F* = *mlt*−2*.*

*Пусть физические величины x и y связаны уравнением*

*y* = *f* (*x*)*. (1.4)*

*В силу (1.3) из уравнения (1.4) следует, что*

*Y* = *f* (*X*)*, (1.5)*

*где X* = *αx, Y* = *βy. Найдем значение β, полагая, что аргумент x и* параметр *α могут принимать любые значения. Дифференцируя (1.4)* и (1.5) при постоянных *α и β, находим*

*dy* = *f* ′(*x*)*, dY*

= *f* ′(*X*)*.*

*dx dX*

*Вторую из этих формул можно записать в виде*

*β dy* ′

*т. е.*

*Поскольку*

*α* · *dx* = *f* (*X*)*,*

*β f* ′(*x*) = *f* ′(*X*)*. α*

*отсюда находим*

*β xY*

= *,*

*α yX*

*или*

*xY f* ′(*x*) = *f* ′(*X*)

*yX*

*f* ′(*x*)

*x*

*f* (*x*)

*f* ′(*X*)

= *X*

*f* (*X*)

*. (1.6)*

*Правая часть уравнения (1.6) зависит только от X, левая - только от*

*x. Это возможно только в том случае, когда они обе равны постоянной* величине. Обозначая эту постоянную *c, получаем дифференциальное* уравнение:

*f* ′(*x*)

*x* = *c*

*f* (*x*)

*или*

*Отсюда находим*

*df dx*

= *c .*

*f* *x*

*f* (*x*) = *f*0*xc,*

*где f*0 *- постоянная интегрирования.*

*Аналогично,*

*или* Поскольку это дает

*Y* = *f*0*Xc,*

*βy* = *f*0 · (*αx*)*c. y* = *f*0*xc,*

*β* = *αc. (1.7)*

*Таким образом, инвариантность физической величины по отношению* к изменению единицы, определяемая условием (1.3), приводит к соот- ношению (1.7). Выясним, каков его физический смысл. Очевидно, если

*O L1*



*R2*

*O2*

*L2*



*l2 O1*

*l1*

*R1*

*2*

*1*.М

*1*

*O0*



*\_lис. 1.1. K определению плоского угла*

*величина x выбрана в качестве базисной, то размерность величины y*

*есть*

dim *y* = *xc.*

*Приведенные рассуждения нетрудно обобщить на случай, когда* рассматриваемая величина зависит от нескольких базисных величин. Пусть, например, число базисных величин выбрано равным трем, и за них приняты длина (*l), масса (m) и время (t), тогда для любой физи-* ческой величины *y имеем*

dim *y* = *lpmqtr, (1.8)*

*где p, q, r - постоянные числа. Формула (1.8) показывает, что если* единицы длины, массы и времени уменьшить в *α, β и γ раз, то еди-* ница производной величины *y уменьшится в αpβqγr раз, и, следова-* тельно, ее числовое значение увеличится в такое же число раз. В этом и состоит смысл понятия размерности. Величины *p, q, r оказываются* фактически рациональными числами. Это является следствием соот- ветствующих определений физических величин.

*Часто размерность физической величины отождествляется с ее еди-* ницей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность м/с, а сила кг м*/с*2*. В этом нет большой* беды, хотя, строго говоря, это неверно.

·

*Е,циницы у'Juн. Отдельного рассмотрения требует вопрос о единице* плоского и телесного углов. При измерении плоского угла используют угол, называемый градусом, а также <дуговую меру> - <длину ду- ги окружности единичного радиуса> (рис. 1.1). В обоих случаях речь идет, по существу, об отношении величины дуги к радиусу:

*l l*2 *l*1 *L*2 *L*1

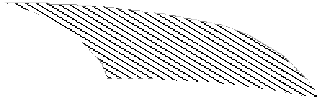
*ϕ* = 1*м* = *ϕ*2 − *ϕ*1 = 1*м* − 1*м* = *R*2 − *R*1 *.*

*Измеряется плоский угол ϕ между двумя радиусами-векторами OO*1 *и OO*2*. Здесь l*1*, l*2 *- дуги окружности единичного радиуса, L*1*, L*2 *-* дуги окружности с радиусами соответственно *R*1 *и R*2*. Чтобы подчерк-* нуть отличие от градусной меры, к числовому значению *ϕ добавляют* название <рад> (радиан). Если, например, *l* = 1 *м, то единица ϕ* =

= 1 *м/*1 *м* = 1 *рад, что соответствует* 57◦17′44*,*80625′′*.*

*Аналогично для телесного угла*

*S имеем (рис. 1.2):*



*R*

*S*0

Ω = 1 *м*2 *.*

*Здесь S*0 *- площадь участка (в еди-* ницах м2*) сферической поверхности* радиуса 1 м. Если *S - участок по-* верхности сферы радиуса *R, то*

*S*0 *S*

*O*

*\_lис. 1.2. K определению телесного угла*

1 *м*2

Ω = 1 *м*2 = *R*2 *.*

*Единицу телесного угла определяют* следующим образом: при *S*0 = 1 *м*2

Ω = 1 *м*2 = 1 *ср* (*стерадиан*)*.*

*Таким образом, полный плоский угол (360*◦*) имеет ϕ* = 2*π рад, а* полный телесный угол (*S*0 *- полная величина площади поверхности* сферы) - Ω = 4*π ср. Часто сокращения <рад> или <ср> опускаются,* что иногда приводит к недоразумениям.

*Базисные неJичины системы СИ. В международной системе СИ в качестве базисных приняты единицы, приведенные в таблице 2.*

*Эталоны этих величин выбираются следующим образом.*

*Мдтр - длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал* времени 1/299 792 458 с.

*Килогр мм - единица массы, равная массе международного про-* тотипа. Прототип 1 кг массы представляет собой цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%) диаметром около 39 мм и такой же высоты. Выбор этого сплава обеспечивает стойкость, однородность и высокую полируемость поверхности (так что его легко очищать). Плот- ность сплава 21,5 г/см3*. Прототип находится в Международном бюро* мер и весов в Севре под Парижем. Относительная погрешность сличе-

*ния с эталоном не превосходит* 2 · 10−9*.*

*Т а б л и ц а* *2*

## *Базисные е,циницы системы СИ*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Тип величины* | *Название единицы* | *Сокращенное обо- значение базисной*  *величины* |
| *Длина* | *Метр* | *м* |
| *Масса* | *Килограмм* | *кг* |
| *Время* | *Секунда* | *с* |
| *Сила электриче- ского тока* | *Ампер* | *А* |
| *Температура* | *Кельвин* | *К* |
| *Сила света* | *Кандела* | *кд* |
| *Количество вещества Плоский угол* | *Моль*  *Радиан* | *моль*  *рад* |
| *Телесный угол* | *Стерадиан* | *ср* |

*Сдкунз* *единица времени, равная 9 192 631 770 периодов излуче-*

*ния, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями* основного состояния атома 133*Cs.*

*Ампдр - единица силы тока, равная силе неизменяющегося тока, ко-* торый, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, располо- женным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между

*проводниками силу, равную* 2 · 10−7 *Н на каждый метр длины.*

*Кдльвин - единица температуры, равная 1/273,16 части термоди-*

*намической температуры тройной точки воды.*

*Моль - единица количества вещества, равная такому его количе-* ству, в котором содержится столько же структурных элементов, сколь- ко атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода 12*C.*

*К нздл - единица силы света, равная силе света в заданном на-* правлении источника, испускающего монохроматическое излучение ча- стотой 540 1012 *Гц, сила излучения которого в этом направлении со-* ставляет 1/683 Вт/ср.

·

*Производные единицы СИ приведены в таблице 3. Приведенные* выше базисные единицы вместе с согласованными производными еди- ницами составляют систему единиц СИ. Единицы измерения плоского и телесного углов радиан и стерадиан могут рассматриваться либо как базисные, либо как производные. В физике радиан и стерадиан отно-

*Т а б л и ц а* *3*

## *Сu'Jасuнанные нрuизнu,цные е,циницы системы СИ*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Тип единицы* | *Название единицы*  *СИ* | *Сокращение* | *Отношение к другим*  *единицам СИ* |
| *Сила* | *Ньютон* | *Н* | 1 *Н* = 1 *кг* · *м* · *с*−2  1 *Па* = 1 *Н* · *м*−2  1 *Дж* = 1 *Н* · *м*  1 *Вт* = 1 *Дж* · *с*−1  1 *Кл* = 1 *А* · *с*  1 *В* = 1 *Вт* · *А*−1  1 *Ф* = 1 *Кл* · *В*−1  1 *Ом* = 1 *В* · *А*−1  1 *См* = 1 *Ом*−1  1 *Вб* = 1 *В* · *с*  1 *Тл* = 1 *Вб* · *м*−2  1 *Гн* = 1 *Вб* · *А*−1  1 *лм* = 1 *кд* · *ср* 1 *лк* = 1 *лм* · *м*−2 1 *Гц* = 1 *с*−1  1 *дптр* = 1 *м*−1 |
| *Давление и* | *Паскаль* | *Па* |
| *механическое* |  |  |
| *натяжение* |  |  |
| *Энергия,* | *Джоуль* | *Дж* |
| *работа* |  |  |
| *Мощность* | *Ватт* | *Вт* |
| *Заряд* | *Кулон* | *Кл* |
| *Электрическое* | *Вольт* | *В* |
| *напряжение* |  |  |
| *Электрическая* | *Фарада* | *Ф* |
| *емкость* |  |  |
| *Электрическое* | *Ом* | *Ом* |
| *сопротивление* |  |  |
| *Электрическая* | *Сименс* | *См* |
| *проводимость* |  |  |
| *Магнитный* | *Вебер* | *Вб* |
| *поток* |  |  |
| *Плотность* | *Тесла* | *Тл* |
| *магнитного* |  |  |
| *потока* |  |  |
| *Индуктивность* | *Генри* | *Гн* |
| *Световой поток* | *Люмен* | *лм* |
| *Освещенность* | *Люкс* | *лк* |
| *Частота* | *Герц* | *Гц* |
| *Преломляющая* | *Диоптрия* | *дптр* |
| *способность* |  |  |

*сят, вообще говоря, к классу производных единиц. В некоторых обла-* стях физики стерадиан, однако, считается базисной единицей. Символ

*<ср> нельзя при этом заменять числом 1.*

*Измерения и обработка результатов измерений Измерение физических величин и получение их числовых значений*

*являются непосредственной задачей большинства физических экспери-* ментов. При измерениях значение физической величины выражается в виде числа, которое указывает, во сколько раз измеренная величи- на больше (или меньше) другой величины, значение которой принято за единицу. Полученные в результате измерений числовые значения различных величин, например, времени, пути, скорости и т. д., могут зависеть друг от друга. Физика устанавливает связь между такими величинами и выражает её в виде формул, которые показывают, как числовые значения одних величин могут быть найдены по числовым значениям других.

*Получение надежных числовых значений не является простой за-* дачей из-за погрешностей, неизбежно возникающих при измерениях. Мы рассмотрим эти погрешности, а также методы, применяемые при обработке результатов измерений. Владение этими методами нужно для того, чтобы научиться получать из совокупности измерений наи- более близкие к истине результаты, вовремя заметить несоответствия и ошибки, разумно организовать сами измерения и правильно оценить точность полученных значений.

*Измеренин и их нu'решнuсти. Измерения делятся на прямые и косвенные.*

*Прямыд и мдрдния производятся с помощью приборов, которые из-* меряют непосредственно саму исследуемую величину. Так, массу тела можно найти с помощью весов, длину измерить линейкой, а время - секундомером.

*К косвднным относятся измерения таких физических величин, для* нахождения которых необходимо использовать связь в виде формулы с другими, непосредственно измеряемыми величинами, например, на- хождение объёма тела по его линейным размерам, нахождение плотно- сти тела по измеренным массе и объёму, расчёт сопротивления провод- ника по показаниям вольтметра и амперметра.

*Качество измерений определяется их точностью. При прямых изме-* рениях точность опытов устанавливается из анализа точности метода и прибора, а также из повторяемости результатов измерений. Точность косвенных измерений зависит как от надёжности используемых для расчёта данных, так и от структуры формул, связывающих эти дан- ные с искомой величиной.

*Точность измерений характеризуется их погрешностями. Абсолют- ной погрдшностью и мдрдний называют разность между найденным на*

*опыте и истинным значением физической величины. Обозначая абсо-* лютную погрешность измерения величины *x символом* ∆*x, получим*

∆*x* = *xизм* − *xист. (1.9)*

*Кроме абсолютной погрешности* ∆*x часто бывает важно знать от-* носительную погрешность *εx измерений, которая равна отношению аб-* солютной погрешности к значению измеряемой величины:

∆*x*

*εx* =

*xист*

= *xизм* − *xист . (1.10)*

*xист*

*Качество измерений обычно определяется именно относительной, а* не абсолютной погрешностью. Одна и та же погрешность в 1 мм при измерении длины комнаты не играет роли, при измерении стола мо- жет быть существенна, а при определении диаметра болта совершенно недопустима. Это происходит потому, что относительная погрешность

*измерений в первом случае составляет* 2 10−4*, во втором* 10−3*, а в*

∼ · ∼

*третьем может составлять десяток процентов и более. Вместо того что-*

*бы говорить об абсолютной и относительной погрешности измерений,* часто говорят об абсолютной и относительной ошибке. Между терми- нами <погрешность> и <ошибка> нет никакого различия, и мы будем пользоваться ими обоими.

*Согласно (1.9) и (1.10), для того чтобы найти абсолютную и относи-* тельную погрешности измерения, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение интересующей нас величины. Но если истинное значение известно, то незачем производить измерения. Цель измере- ний всегда состоит в том, чтобы узнать неизвестное заранее значение физической величины и найти если не истинное её значение, то хо- тя бы значение достаточно мало от него отличающееся. Что касается погрешностей, то, строго говоря, они не вычисляются, а оцениваются. При оценках учитываются условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и ряд других факторов.

*Систематические и сJучайные нu'решнuсти. Говоря о погреш-* ностях измерений, необходимо прежде всего упомянуть о грубых по- грдшностях (промахах), возникших вследствие недосмотра эксперимен- татора или неисправности аппаратуры. Грубых ошибок следует избе- гать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измере- ния нужно отбросить.

*Не связанные с грубыми ошибками погрешности опыта делятся на* систематические и случайные.

*Систдм тичдскид погрдшности сохраняют свою величину и знак во* время эксперимента. Они могут быть связаны с ошибками прибо- ров (неправильная шкала, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, неравные плечи весов) и с самой постановкой опыта, например, при взвешивании тела малой плотности без учёта выталкивающей архимедовой силы, которая си- стематически занижает вес тела. Систематические погрешности опыта могут быть изучены и учтены путём внесения поправок в результаты измерений. Если систематическая погрешность опыта слишком вели- ка, то обычно оказывается проще использовать новые, более точные приборы, чем исследовать погрешность старых.

*Случ йныд погрдшности меняют величину и знак от опыта к опы-* ту. Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а

*<пляшут> вокруг некоторого среднего значения.*

*Случайные погрешности могут быть связаны, например, с сухим* трением (из-за которого стрелка прибора вместо того, чтобы останавли- ваться в правильном положении, <застревает> вблизи него), с люфтом в механических приспособлениях, с тряской, которую в городских усло- виях трудно исключить, с несовершенством объекта измерений (напри- мер, при измерении диаметра проволоки, которая из-за случайных при- чин, возникающих при изготовлении, имеет не вполне круглое сечение) или с особенностями самой измеряемой величины. Примером в послед- нем случае может быть число космических частиц, регистрируемых счётчиком за 1 минуту. Повторяя измерения, найдём, что в разных опытах получаются разные числа, хотя и не слишком отличающиеся друг от друга, колеблющиеся около некоторого среднего значения.

*Случайные погрешности эксперимента исследуются путём сравне-* ния результатов, полученных при нескольких измерениях, проведён- ных в одинаковых условиях. Если при двух-трёх измерениях резуль- таты совпали, то на этом следует остановиться. Если они расходятся, нужно попытаться понять причину расхождения и устранить её. Если устранить причину не удаётся, следует произвести 10-12 измерений и, записав все результаты, обработать их в соответствии с полученной закономерностью разброса величин.

*Различие между систематическими и случайными погрешностями* не является абсолютным и связано с постановкой опыта. Например, производя измерение тока не одним, а несколькими одинаковыми ам- перметрами, мы превращаем систематическую ошибку, связанную с неточностью шкалы, в случайную ошибку, величина и знак которой зависят от того, какой поставлен амперметр в данном опыте. Однако во всяком опыте - при заданной его постановке - различие между си-

*стематическими и случайными погрешностями всегда можно и нужно* устанавливать с полной определённостью.

*Систематические нu'решнuсти. К систематическим погрешностям* относятся, как уже отмечалось, такие, которые обязаны своим проис- хождением действию неизменных по своей величине и направлению факторов. Теоретически рассуждая, систематические погрешности все- гда могут быть учтены и, следовательно, исключены. Практически эта задача является делом трудным и требует большого искусства экспе- риментатора.

*Оценку систематических погрешностей экспериментатор проводит,*

*анализируя особенности методики, паспортную точность прибора и* проводя контрольные опыты. В учебном практикуме учёт систематиче- ских ошибок ограничивается, как правило, лишь случаем инструмен- тальных погрешностей. Остановимся на наиболее часто встречающих- ся случаях.

*Систематические погрешности стрелочных электроизмерительных* приборов (амперметров, вольтметров, потенциометров и т. п.) опреде- ляются их классом точности, который выражает абсолютную погреш- ность прибора в процентах от максимального значения включённой шкалы. Пусть на шкале вольтметра с диапазоном показаний от 0 до

*10 В в кружке стоит цифра 1. Эта цифра показывает, что класс точ-* ности вольтметра 1 и предел его допустимой погрешности равен 1% от максимального значения включённой шкалы, т. е. равен 0*,*1 *В. Кро-* ме того, надо иметь в виду, что наносить деления на шкале принято с таким интервалом, чтобы величина абсолютной погрешности прибора не превышала половины цены деления шкалы.

±

*Класс точности стрелочных электроизмерительных приборов (как* и полцены деления шкалы) определяет максимальную (предельную) абсолютную погрешность, величина которой не меняется вдоль всей шкалы. Относительная же погрешность при этом резко меняется, по- этому приборы обеспечивают лучшую точность при отклонении стрел- ки почти на всю шкалу. Отсюда следует рекомендация: выбирать при- бор (или шкалу многошкального прибора) так, чтобы стрелка прибора при измерениях находилась во второй половине шкалы.

*В последнее время широко используются цифровые универсальные* приборы, в том числе и электроизмерительные, отличающиеся высо- кой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов систематические погрешности цифровых электроизмеритель- ных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение относительной погрешности в процентах универсального цифрового вольтметра В7-34, работающе-

*го на включённом пределе 1 В, оценивается по формуле*

*ε* = 0*,*015 + 0*,*002 *Ukx* − 1 · 1 + 0*,*1 · |*t* − 20| *, (1.11)*

*Ux*

*x*

*где Ukx - конечное значение предела измерения, B,*

*Ux - значение измеряемой величины, В,*

*t - температура,* ◦*C.*

*В случае измерения этим прибором постоянного напряжения вели-* чиной 0,5 В при температуре окружающей среды *t* = 30 ◦*C значение* предела допустимой погрешности равняется:

##### *ε* = 0*,*015 + 0*,*002 1 − 1 · 1 + 0*,*1 · |30 − 20| = 0*,*034%*,*

0*,*5

*x*

*что составляет* 0*,*00017 *В от измеряемой величины 0,5 В.*

±

*При изменении предела измерений прибора (на 100 или 1000 В) или*

*вида измерений (ток, сопротивление) структура формулы не изменяет-* ся, меняются только числа, входящие в формулу. Точность вольтметра В7-34 обеспечивается при соблюдении следующих условий: окружаю-

*щая температура 5-40* ◦*C, относительная влажность воздуха до 95%* при 30 ◦*C, напряжение питающей сети* 220 22 *В.*

∼ ±

*Несколько слов о точности линеек. Металлические линейки относи-*

*тельно точны: миллиметровые деления наносятся с погрешностью не* более 0*,*05 *мм, а сантиметровые не более, чем с точностью 0,1 мм, так* что считывание результата измерения можно проводить с помощью лу- пы, снабжённой дополнительной шкалой. Деревянными или пластмас- совыми линейками лучше не пользоваться: их погрешности неизвестны и могут оказаться неожиданно большими. Исправный микрометр обес- печивает точность 0,01 мм, а погрешность измерения штангенциркулем определяется точностью, с которой может быть сделан отсчёт, т. е. точ- ностью нониуса. У штангенциркулей цена делений нониуса составляет обычно 0,1 или 0,05 мм.

±

*СJучайные нu'решнuсти. Случайные величины, к которым отно-* сятся случайные погрешности, изучаются в теории вероятностей и в математической статистике. Мы опишем - с пояснениями, но без до- казательств - основные свойства и правила обращения с такими вели- чинами в том объёме, который необходим для обработки результатов измерений, полученных в лаборатории.

*Случайные погрешности устранить нельзя, но благодаря тому, что*

*они подчиняются вероятностным закономерностям, всегда можно ука-* зать пределы, внутри которых с заданной вероятностью заключается истинное значение измеряемой величины.

*Задача определения случайных погрешностей была решена созда-* нием теории, хорошо согласующейся с экспериментом. В основе этой теории лежит закон нормального распределения, включающий следу- ющие закономерности:

*1. При большом числе измерений ошибки одинаковой величины, но* разного знака, встречаются одинаково часто.

*2. Частота появления ошибок уменьшается с ростом величины ошибки.* Иначе говоря, большие ошибки наблюдаются реже, чем малые.

*3. Ошибки измерений могут принимать непрерывный ряд значений.* Случайные погрешности изучают, опираясь на изложенные законо-

*мерности, и для понимания такого подхода требуется ввести понятие*

*вероятности.*

*Статистическая вероятность события определяется отношением* числа *n случаев его появления к общему числу N всех возможных* равновероятных случаев:

*n*

*P* = *. (1.12)*

*N*

*Пусть в урне находится 100 шаров, из них 7 чёрных, а остальные* белые. Вероятность вытащить наугад чёрный шар равна 7/100, веро- ятность вытащить белый - 93/100.

*Применим понятие вероятности к оценке разброса случайных по-* грешностей.

*Проделаем n измерений какой-либо величины (например, диамет- ра стержня) и будем считать, что про.махи и систе.мати'Ческие ошиб-*

*ки устранены и расс.матриватъ буде.м толъко слу'Чайные ошибки. В* результате этих измерений мы получим ряд значений *x*1*, x*2*, ..., xn.* Если *x*0 *есть наивероятнейшее значение измеряемой величины (пред-* положим, что оно нам известно), то разность ∆*xi между измеренным* значением *xi и x*0 *называется абсолютной случайной погрешностью* отдельного измерения. Тогда

*x*1 *x*0 = ∆*x*1

−

*x*2 *x*0 = ∆*x*2

−

*. . . . . . . . . . . . . . .*

*xn* − *x*0 = ∆*xn*

*Сложив эти равенства почленно, получим*

*n n*

P

P

*xi* − ∆*xi*

*x*0 = *i*=1 *i*=1 *, (1.13)*

*n*

*где* ∆*x могут быть как положительными, так и отрицательными чис-* лами. Согласно нормальному закону распределения, погрешности, рав- ные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, равнове- роятны. Следовательно, чем больше число измерений *n, тем более веро-* ятна полная взаимная компенсация погрешностей при их усреднении, так что

*n*

#### 1 L

lim ∆*x* = 0*.*

*Тогда*

*n*→∞ *n*

*i*

*i*=1

*n*

*i*

##### lim

*xср*

##### = lim

1 L *x*

= *x*0*. (1.14)*

*n*→∞

*n*→∞ *n i*=1

*Следовательно, среднее арифметическое xср результатов отдельных из-* мерений при очень большом значении *n (т. е. n ) равно наиверо-* ятнейшему значению измеряемой величины *x*0*. На практике n всегда* конечно, и *xср лишь приближённо равно наивероятнейшему значению* измеряемой величины *x*0 *и тем ближе к нему, чем больше число изме-* рений *n.*

→ ∞

*В качестве наилучшего значения для измеряемой величины обычно*

*принимают среднее арифметическое из всех полученных результатов:*

*x* = 1 L *x*

*n*

*ср*

*n*

*i*

*i*=1

= *x*1 + *x*2 + *. . .* + *xn . (1.15)*

*Чтобы оценить достоверность полученного результата, необходимо* обратиться к распределению случайных погрешностей отдельных из- мерений. Распределение погрешностей часто подчиняется норм льному

*n*

*кону р спрдздлдния (распределению Гаусса):*

##### 1

√

*y* = *e*

2*πσ*

− (*x*−*x*0 )2

2*σ*2 *, (1.16)*

*где y - функция распределения (плотность вероятности) погрешно-* стей:

*dn*

*y* = *,*

*n* · *dδ*

*где dn/*(*n dδ*) *- доля случаев, приходящихся на бесконечно малый* интервал погрешностей *dδ,*

·

*x*0 *- наивероятнейшее значение измеряемой величины,*

*δ* = (*x x*0) *- случайная погрешность,*

−

*σ - среднеквадратичная погрешность. Величину σ*2

*вать дисперсией распределения.*

*принято назы-*

*y*

*σ*1 = 0*,*5

*σ*2 = 1

*0,8*

*0,6*

*0,4*

*0,2*

−3 −2 −1 *0 1 2 3 δ*

*\_lис. 1.3. Нормальное распределение i1 Графики закона нормального распределения с различными значе-*

*ниями σ изображены на рис. 1.3.*

*Точки δ* = *x x*0 = *σ есть точки перегиба кривой Гаусса. Пара-* метр *σ есть мера рассеяния случайных погрешностей δ. Если результа-* ты измерений *x группируются вблизи наивероятнейшего значения x*0 *и значения случайных погрешностей δ в основном малы, то мала и ве-* личина *σ (график 1, σ* = *σ*1*). Наоборот, если случайные погрешности* *δ имеют большие значения и сильно рассеяны, то кривая становится* более размытой (график 2, *σ* = *σ*2*) и σ*2 *> σ*1*. Величина σ количествен-* но характеризует ширину графика функции распределения случайной

| | | − |

*величины и, следовательно, разброс значений измеряемой величины.*

*Отношение площади под кривой Гаусса, ограниченной значениями* *δ* = *σ (на рис. 1.3 эта площадь заштрихована для σ*1 = 0*,*5*), ко всей* площади под кривой составляет 0,68, и запись *x* = *x*0 *σ говорит о том,* что любое проведённое измерение *x с вероятностью 0,68 (68%) лежит* в этом интервале.

±

±

*Если записано x* = *x*0 2*σ, то вероятность попадания в этот про-* межуток любого проведённого измерения составляет 0,95, и если *x* =

±

= *x*0 ± 3*σ, то вероятность равна 0,997.*

*Говоря о погрешностях, мы постоянно обращаемся к Гауссовому за-* кону распределения. В пользу применения нормального закона имеют- ся серьёзные основания и главное из них - центральная предельная теорема: если суммарная погрешность проявляется в результате сов- местного действия ряда факторов, каждый из которых вносит малую долю в общую погрешность, то по какому бы закону не были распре- делены погрешности, вызываемые каждым из факторов, результат их суммарного действия приведёт к Гауссовому распределению погрешно- стей.

*При ограниченном числе измерений n (т. е. n - конечно) отклоне-* ние результата отдельного измерения от наивероятнейшего значения *x*0 *оценивается выборочным среднеквадратичным отклонением σотд:*

##### г1 1 L*n*

*n i*=1

*σотд* = �

(*xi* − *x*0)2*. (1.17)*

*Эту формулу использовать на практике невозможно, т. к. наиверо-* ятнейшее значение измеряемой величины *x*0 *неизвестно. Однако оце-* нить значение *σотд возможно, если заменить x*0 *в формуле (1.17) сред-* ним арифметическим значением *xср:*

##### г1 1 L*n*

*n i*=1

*σотд* = �

(*xi* − *xср*)2*. (1.18)*

*Если n - невелико, то xср может заметно отличаться от x*0 *и форму-* ла (1.18) даёт довольно грубую оценку *σотд. Согласно математической* статистике рекомендуется использовать формулу

##### г1 1 L

*n*

*σ* = � −

*отд n* 1

*i*=1

(*xi* − *xср*)2*. (1.19)*

*Здесь σотд - среднеквадратичная погрешность отдельного измерения* или стандартная погрешность (стандартное отклонение), полученная путём измерений. Достоверность вычислений *σотд увеличивается с уве-* личением числа измерений *n.*

*Значение σотд является мерой разброса экспериментальных резуль-*

*татов относительно среднего значения.*

*Пu'решнuсть сре,цне'u арифметическu'u резуJьтата измере-* нин. Часто практически нас больше интересует не точность каждого из *n измерений, а погрешность среднего арифметического и, главное,* насколько оно соответствует наивероятнейшему значению измеряемой величины. Чтобы это оценить, проделаем ряд серий по *n измерений* величины *x и найдём для каждой серии своё xср. Полученные средние* значения *xср колеблются по величине случайным образом около неко-* торого центра *x*0*, приближаясь по характеру разброса к нормально-* му закону распределения. Стандартную ошибку отклонения *xср от x*0 *можно оценить с помощью среднеквадратичной погрешности результа-* та *σср (аналогично тому, как мы это делаем для σотд для каждого из*

*n измерений величины x). В теории вероятностей доказывается, что* средняя квадратичная погрешность результата *σср связана со средней* квадратичной погрешностью отдельного измерения *σотд следующим*

*образом:*

*σотд* г1 1 L 2

*n*

*σср* =

√*n* = � *n*(*n* − 1)

*i*=1

(*xi* − *xср*) *. (1.20)*

*Тогда результат измерения величины x может быть представлен в виде*

*x* = *xср* ± *σср. (1.21)*

*Запись утверждает, что наивероятнейшее значение измеряемой ве-* личины *x*0 *с вероятностью 0,68 (68%) лежит в интервале xср σср (при* значительном числе измерений *n).*

±

*Погрешность σср обычно называют стандартной погрешностью опы-*

*та, а её квадрат - дисперсией.*

*Можно показать, что, как правило, погрешность результата измере-* ний только в 5% случаях превосходит 2*σср и почти всегда оказывается* меньше 3*σср.*

*На первый взгляд, из сказанного можно сделать вывод, что, беспре-* дельно увеличивая число измерений, можно даже с самой примитив- ной аппаратурой получить очень хорошие результаты. Это, конечно, не так. С увеличением числа измерений уменьшается случайная по- грешность опытов. Методические погрешности, связанные с несовер- шенством приборов, при увеличении числа опытов не меняются, т. е. число опытов следует выбирать разумно, не завышая его неоправдан- но.

*Если число опытов мало (менее 8), лучше применять другие, более* сложные оценки. Следует иметь в виду, что при *n* 10 *измерение σср* определяется с точностью до 20-30%. Поэтому расчёт погрешностей следует выполнять с точностью до двух знаков, не более.

≈

*СJu2Кение сJучайных и систематических нu'решнuстей. В ре-* альных опытах присутствуют как систематические, так и случайные ошибки. Если знак и величина систематической погрешности каким- либо образом определены, то она может быть вычтена непосредствен- но из результатов измерений. Однако обычно имеет место ситуация, в которой известно лишь оценка максимально возможного значения систематической погрешности по модулю - в таком случае можно по аналогии со случайной величиной ввести характеристику системати- ческой ошибки *σсист (например, при измерениях обычной линейкой*

*σсист* ≈ 1*мм).*

*Пусть случайные и систематические ошибки характеризуются по-* грешностями *σсист и σсJYч. Суммарная погрешность есть их средне-* квадратичное значение, определяемое по формуле

2

*σ*

*llоJн*

2

*сист*

= *σ*

2

*сJYч*

+ *σ*

*. (1.22)*

*Обратим внимание на полезную особенность формулы. Пусть одна* из ошибок, например, *σсJYч в 2 раза меньше другой - в нашем случае* *σсист. Тогда*

*σ* = ✓*σ*2 + *σ*2 = 5 *σ* ≈ 1*,*12*σ .*

*llоJн*

*сист*

*сJYч*

4

*сист*

*сист*

*В нашем примере с точностью 12% σllоJн* = *σсист. Таким образом,* меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже ес- ли она составляет половину от неё. Данный вывод очень важен. В том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше система- тической, нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Из- мерения достаточно произвести 2-3 раза, чтобы убедиться, что случай- ная ошибка действительно мала.

*Обрабuтка резуJьтатuн нри кuсненных измеренинх. Если иссле- дуемая величина представляет собой сумму или разность двух изме- ренных величин*

*a* = *b* ± *c, (1.23)*

*то наилучшее значение величины a равно сумме (или разности) наилуч-* ших значений слагаемых: *aнаиJ* = *bнаиJ cнаиJ, или, как рекомендовано* выше,

±

*aнаиJ* = (*b*Ь ± (*c*Ь *. (1.24)*

*Здесь и в дальнейшем угловые скобки (или черта сверху) означают* усреднение: вместо того, чтобы писать *aср, будем пользоваться обозна-* чением (*a*Ь *(или a*¯*) и т. д.*

*Среднеквадратичная погрешность σa, если величины a и b незави-*

*симы, находится по формуле*

*σa* = ✓*σ*2 + *σ*2*, (1.25)*

*b*

*c*

*т. е. погрешности, как всегда, складываются квадратично, или, что то* же самое, складываются дисперсии результатов измерений.

*В том случае, если искомая величина равна произведению или част-* ному двух других

*a* = *bc или a* =

*b*

*, (1.26)*

*c*

*то*

*aнаиJ*

= (*b*Ь (*c*Ь *или a*

*наиJ*

= (*b*Ь *. (1.27)*

(*c*Ь

*Относительная среднеквадратичная погрешность произведения или* частного независимых величин находится по формуле

*σa*  *σb* 2

=

*a*

*b*

*σc* 2

*c*

*. (1.28)*

*Приведём расчётные формулы для случая, когда*

+

*a* = *bβ* · *cγ* · *eε . . . (1.29)*

*Наилучшее значение a связано с наилучшими значениями b, c и* *e и т. д. той же формулой (1.29), что и каждое конкретное значение.* Относительная среднеквадратичная погрешность величины *a при неза-* висимых *b, c, e, . . . определяется формулой*

*σa* 2

*a*

2 *σb* 2

*b*

2 *σc* 2

*c*

2 *σe* 2

*e*

+ *. . . (1.30)*

*Наконец, приведём для справок общую расчётную формулу. Пусть*

= *β*

+ *γ*

+ *ε*

*a* = *f* (*b, c, e, . . .*)*, (1.31)*

*где f - произвольная функция величин b, c, e и т. д. Тогда*

*aнаиJ* = *f* (*bнаиJ, cнаиJ, eнаиJ, . . .*)*. (1.32)*

*Формула (1.32) справедлива как в случае, когда bнаиJ, cнаиJ и т. д. непо-* средственно измерены, так и в случае, если они сами найдены по изме- ренным значениям других величин. В первом случае значения *bнаиJ,* *cнаиJ и т. д., как уже указывалось, равны* (*b*Ь*,* (*c*Ь *и т. д.*

*Погрешность a находится по формуле*

2

2

2

*σ*2 =

*a*

*∂f* 2

*∂b*

* *σb* +

*∂f* 2

*∂c*

* *σc* +

*∂f* 2

*∂e*

* *σe* + *. . . (1.33)*

*Обозначение ∂f/∂b имеет обычный смысл частной производной функ-* ции *f по b, т. е. производной, при вычислении которой все остальные* аргументы, кроме *b (в нашем случае c, e и т. д.), считаются постоян-* ными. Аналогичный смысл имеют частные производные по *c, e и т. д.* Частные производные следует вычислять при наилучших значениях

*аргументов bнаиJ, cнаиJ, eнаиJ и т. д. Формулы (1.25), (1.28) и (1.30)* являются частными случаями формулы (1.33).

*Рассмотрим некоторые следствия, которые могут быть получены* из анализа формул, приведённых в этом разделе. Прежде всего заме- тим, что следует избегать измерений, при которых искомая величина находится как разность двух больших чисел. Так, толщину стенки тру- бы лучше измерять непосредственно, а не определять, вычитая внут- ренний диаметр из внешнего (и, конечно, деля результат пополам). Относительная погрешность измерения, которая обычно представляет главный интерес, при этом сильно увеличивается, так как измеряемая величина - в нашем случае толщина стенки - мала, а ошибка в её определении находится путём сложения погрешностей измерения обо- их диаметров и поэтому возрастает. Следует также помнить, что по- грешность измерения, которая составляет, например, 0,5% от величины внешнего диаметра, может составить 5 и более процентов от толщины стенки.

*При измерениях, которые затем обрабатываются по формуле (1.26)* (например, при определении плотности тела по его массе и объёму), следует определять все измеряемые величины с приблизительно оди- наковой относительной точностью. Так, если объём тела измерен с по- грешностью 1%, то при взвешивании с погрешностью 0,5% его плот- ность определяется с точностью 1,1%, а при взвешивании с погрешно- стью 0,01% - с точностью 1%, т. е. с той же практически точностью. Тратить силы и время на измерение массы тела с точностью 0,01% в этом случае, очевидно, не имеет смысла.

*При измерениях, которые обрабатываются по формуле (1.29), сле-* дует обращать главное внимание на точность измерения величины, вхо- дящей в расчётную формулу с наибольшим показателем степени.

*Прежде чем приступить к измерениям, всегда нужно подумать о*

*последующих расчётах и выписать формулы, по которым будут рас-* считываться погрешности. Эти формулы позволят понять, какие изме- рения следует производить особенно тщательно, а на какие не нужно тратить больших усилий.

### *Рекомендации по выполнению лабораторных работ*

*К каждому выполняемому эксперименту нужно относиться как к небольшому самостоятельному научному исследованию. Описания за- дач - только стержни, вокруг которых строится работа. Конкретное содерЭ1ание лабораторной работы, обвё.м навыков и сведений, извлека- е.мых из неё, определяются главны.м образо.м не описание.м, а подходо.м*

*студента к её выполнению Самое ценное, что может дать практикум,*

*- умение обдумывать свои опыты, применять теоретические знания в* экспериментальной работе, правильно планировать эксперимент и из- бегать ошибок, видеть важные и интересные особенности и казалось бы мелочи, из которых нередко получаются потом серьёзные научные исследования. Все эти навыки студент должен развить в себе сам в про- цессе упорного, вдумчивого, сознательного и сосредоточенного труда.

*Результатом выполненной работы является отчёт, который должен* содержать

*1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с* кратким выводом необходимых формул и соотношений;

*2) схема экспериментальной установки;*

*3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспе-* риментальных данных;

*4) обработка результатов: вычисление расчётных величин и заполнение* таблиц, построение графиков, вычисление результата эксперимента;

*5) сравнение полученных результатов с известными (в литературе и* справочниках), обсуждение возможных ошибок, предложения по улуч- шению эксперимента.

*Пu,ц'uтuнка к рабuте. Вначале нужно внимательно прочитать описа-* ние работы и теоретическое введение по её тематике. Это необходимо, чтобы получить представление о явлениях, закономерностях и поряд- ках измеряемых величин, с которыми придётся иметь дело при выпол- нении работы, а также о методе измерения и используемых приборах, последовательности действий при проведении измерений.

*Для записей результатов работы надо подготовить рабочую тет-* радь, лучше большого формата, чтобы её можно было использовать в течение, по крайней мере, одного семестра. Оформление каждой ра- боты нужно начинать с номера и названия. Далее должны быть пред- ставлены следующие разделы:

*1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с* кратким выводом необходимых формул и соотношений;

*2) схема экспериментальной установки;*

*3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспе-* риментальных данных;

*Прежде чем приступить к выполнению работы, следует продумать* предложенный в описании план действий, определить необходимое ко- личество измерений. В соответствии с этим предварительно подгото- вить таблицы, в которые будут заноситься результаты.

*Желательно заранее представлять диапазон изменения измеряе-* мых величин и выбрать для них соответствующие единицы. В крайнем

*случае, это нужно сделать на начальном этапе работы. Необходимо по-* думать о точности измерений. Например, при косвенных измерениях величин, имеющих степенную зависимость от непосредственно изме- ряемых, относительная погрешность величин, входящих с б,ольшими показателями степени, должна быть меньше, то есть их следует изме- рять точнее. По возможности следует избегать методов, при которых приходится вычислять разность двух близких по значениям величин. Например, толщину стенки тонкой трубки лучше измерить, как от- мечалось, непосредственно, а не вычислять по значениям внешнего и внутреннего диаметров.

*НачаJu рабuты. В начале работы необходимо тщательно ознакомить-* ся с экспериментальной установкой, проверить работоспособность при- боров. Нужно хорошо разобраться, как они регулируются, включаются и выключаются.

*Всегда очень важно аккуратное и бережное обращение с прибора-* ми. Не следует вскрывать чувствительные приборы и менять настрой- ку. Все сведения о приборах (в первую очередь класс точности, мак- симальное значение на шкале, по которой производятся измерения, и цену деления) и условиях эксперимента необходимо записать в рабо- чей тетради, так как они потребуются при получении окончательных результатов. При составлении (собирании) электрических схем источ- ники питания подключаются к схеме в последнюю очередь.

*Прежде чем приступить к основным измерениям, необходимо прове-* рить работу установки. Первые измерения должны быть контрольны- ми, чтобы убедиться, что всё работает нормально, диапазон и точность измерений выбраны правильно. Если разброс повторных измерений не превышает систематическую погрешность, то многократных измере- ний не требуется.

*Замеченные неполадки в работе приборов и установок надо зафик-* сировать (делать соответствующую запись в тетради) и сообщить об этом преподавателю.

*Прuне,цение измерений. Все записи результатов измерений должны* быть сделаны чётко и подробно, с нужными пояснениями.

*Подойдя к установке следует определить систематическую ошибку* входящих в установку приборов и провести 2-3 измерения одной и той же определяемой заданием величины. Если окажется, что случайная ошибка (1.19) полученных результатов в 2-3 раза меньше системати- ческой ошибки приборов, в дальнейшем можно ограничится однократ- ными измерениями. Если же случайная ошибка окажется равна или больше систематической, то каждое измерение следует повторять та- кое число раз, чтобы случайная ошибка среднего значения *σср (1.20)*

*стала меньше систематической ошибки приборов. В отчёте при этом* надо указать *σср и количество измерений n.*

*Если в начале работы выясняется, что разброс результатов измере-* ний очень большой, то иногда лучше поискать и устранить причину этого, чем выполнять большое количество измерений для получения необходимой точности результата. При изучении зависимости измеря- емой величины от параметра или другой измеряемой величины надо убедиться, что за время измерений в процессе работы не произошло никаких сбоев или существенных изменений внешних условий, влия- ющих на результаты, для чего в конце работы необходимо повторить начальные измерения либо проделать все измерения в обратном поряд- ке.

*Полезно строить предварительные графики зависимостей измеряе-* мых величин между собой или от изменения параметров по мере полу- чения результатов. При этом сразу выделяются области резких измене- ний, в которых измерения должны проводиться подробнее (больше то- чек), чем на участках плавного изменения. Если изучаемая закономер- ность, например, линейность, выполняется только на некотором участ- ке, то область измерений должна быть выбрана шире этого участка, чтобы можно было установить границы выполнения закономерности.

*Перед каждой таблицей должны быть указаны значения цены де-* ления и класс точности каждого прибора, которым производятся из- мерения. В таблицу необходимо заносить число делений, а не саму ве- личину, например, тока или напряжения. Это убережет вас от ошибки при записи экспериментальных данных. В конечном счёте это главное, так как обработка данных может быть проведена разными способами и в любое время, а измерения воспроизвести бывает трудно, а иногда и невозможно.

*Единицы измерения надо выбирать так, чтобы результаты измере-* ния представлялись числами в диапазоне примерно от 0,1 до 1000. При этом таблицы не будут громоздкими, а графики будут удобными для использования. Например, для модуля Юнга металлов (обозначаемых буквой *E), численные значения которых в системе СИ очень велики,* в качестве единицы измерения берут 1010 *Н/м*2*. Тогда наименование* графы таблицы или оси графика будет выглядеть следующим образом: *E, 10*10 *Н м*−2*. Запятая здесь играет важную роль - она отделяет обо-*

·

*значение величины, приводимой в таблице или откладываемой по оси*

*координат, от единицы измерения. В графе таблицы для алюминия* будет стоять 7,05, а на шкалах графиков - небольшие целые числа. Вместо множителя перед единицами измерения могут быть использо- ваны также слова или их сокращения.

*Иногда используется другой способ наименования. В таблицах или* на осях графиков представляют не саму величину, а произведение её на некоторый коэффициент, которое измеряют в обычных единицах. Для

*модуля Юнга при этом получаем: E* 10−10*, Н м*−2*. Хотя и в данном* случае в таблице для алюминия будет стоять 7,05, этот способ меньше

· ·

*используется из-за возможных ошибок при переходе к значению E, так* как множитель по ошибке может быть отнесен к единицам измерения.

*Расчёты анаJиз и нре,цстанJение резуJьтатuн. Полученные пер-* вичные результаты в виде таблиц и графиков используются для расчё- та конечных значений величин и их погрешностей либо для нахожде- ния зависимости измеряемых величин между собой. Все расчёты удоб- но проводить в той же рабочей тетради, где записаны первичные ре- зультаты измерений, и заносить в соответствующие свободные колонки таблиц с экспериментальными данными. Это поможет проводить про- верку, анализ и сопоставление получаемого результата с исходными данными.

*Для измеряемых величин окончательные результаты должны быть*

*представлены в виде среднего значения, погрешности и количества про-* ведённых измерений. В случае косвенных измерений для получения окончательного результата используются их зависимости от измеряе- мых величин, по которым вычисляют и средние значения и погрешно- сти.

*Поскольку погрешность ошибки редко удаётся определить с точно-* стью лучше 20%, при записи результата нужно округлять величину ошибки до одной-двух значащих цифр. Например, правильные запи- си погрешностей: 3*;* 0*,*2*;* 0*,*08*;* 0*,*14*; неправильные записи:* 3*,*2*;* 0*,*23*;* 0*,*084*. Величину* 0*,*14 *не следует округлять до* 0*,*1*, так как* при этом округлении погрешность изменяется на 40%. При записи ре-

± ± ± ±

± ± ± ± ±

*зультата измерения последняя цифра значения физической величины* должна быть того же разряда, что и в погрешности. Например, неко- торый результат при погрешности 0*,*012*, записываемый* 1*,*243 0*,*012*,* при большей погрешности ( 0*,*03*) принимает вид* 1*,*24 0*,*03*, а при* ещё большей погрешности (0,2) - 1*,*2 0*,*2*. В промежуточных расчё-* тах можно сохранить в числах лишнюю значащую цифру для лучшего округления конечного значения. В зависимости от выбора единиц из- мерения погрешность может составлять десятки, сотни, тысячи или

±

± ±

± ±

*более единиц измерения. Например, если вес тела определён с точно-* стью до 0,5 кг и составляет 58*,*3 0*,*5 *кг, то его можно выразить и в* граммах: (583 5) 102 *г. Неправильно было бы написать:* 58300 500 *г.* Для окончательной оценки качества полученных результатов изме-

± · ±

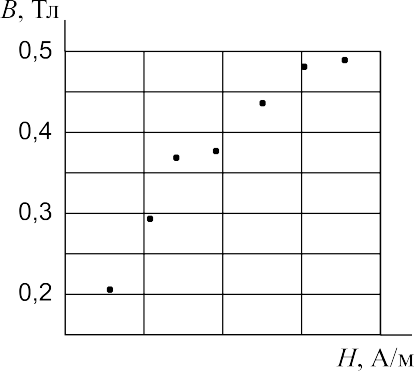
±

*рений надо сравнить их с данными, приводимыми в справочниках.*



*\_lис. 1.4. 11ример неправильного и правильного построения графика*



*Пuстрuение и uбрабuтка 'рафикuн. Для построения графиков сле-* дует использовать специальную миллиметровую бумагу. Размер гра- фика (и соответственно формат листа бумаги) не должен быть очень малым или очень большим - оптимально от четверти до половины ли- ста формата А4.

*При построении графика, прежде чем наносить точки, нужно вы-* брать подходящий масштаб и начало отсчёта на осях координат. Вы- бор должен быть таким, чтобы наносимые точки располагались на всей площади листа. На рис. 1.4 изображены примеры правильного и непра- вильного построения графика. На левом (неправильно построенном) графике экспериментальные точки занимают нижнюю правую часть рисунка. Чтобы этого избежать, следует выбрать более крупный мас- штаб по оси *Y и сместить нуль на оси абсцисс, как это сделано на* правом графике.

*Обозначения функций и единиц измерения на осях координат долж-* но быть ясным и чётким. Не обязательно наименовать все деления шка- лы, но надо сделать столько надписей, чтобы ими было легко и удобно пользоваться. Писать их лучше на внешней стороне осей координат. Если используется бумага с сеткой, имеющей линии различной тол- щины, то на жирных линиях следует располагать круглые значения величин. Удобно, если клеточка сетки соответствует 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10 единицам масштаба измерения откладываемой по оси величины. Неудобно, если одной клетке соответствуют 2,5; 3; 4; 7 и тому подоб- ное количество единиц масштаба. При неудобном масштабе нанесение



*\_lис. 1. . 11роведение линии по экспериментальным точкам*

*точек на график и определение координат точек на графике требует* большего времени и нередко сопровождается ошибками. Наименование величины, откладываемой по оси абсцисс, пишется снизу у конца оси, а по оси ординат - вверху слева. Через запятую указывается единица измерения.

*Точки, наносимые на график, должны изображаться чётко и яс-* но. Их следует наносить карандашом, чтобы можно было исправить при обнаружении ошибок. Не следует делать никаких загромождаю- щих график больших пояснительных надписей или указывать около точек их числовые значения. Если пояснения необходимы, то точка или линия обозначается цифрой и в тексте или на полях графика де- лается соответствующее пояснение. Точки, полученные в различных условиях, например, при нагревании и охлаждении, при увеличении и уменьшении нагрузки и т. д., нужно изображать разными символами: окружностями, квадратами, треугольниками и другими.

*При нанесении на график экспериментальных точек, для которых* известны погрешности, необходимо указывать эти погрешности отрез- ками линий, величина которых соответствует величине погрешности по каждой из переменных, определяющих точку. В таком случае точ- ка изображается крестом. Половина размера креста по горизонтали должна быть равна погрешности по оси абсцисс, а половина размера по вертикали - погрешности по оси ординат. В том случае, если одна из погрешностей - из-за своей малости - не может быть изображена графически, результаты изображаются черточками, вытянутыми на

±*σ в том направлении, где погрешность не мала. Такое изображение*

*экспериментальных точек облегчает анализ результатов, в частности,* поиск зависимостей, наилучшим способом их описывающих, сравнение с теоретическими расчётами или результатами других исследований.

*На рис. 1.5а, б, на которых изображены одни и те же эксперимен-* тальные точки при разных погрешностях измерений, график 1.5а, несо- мненно, указывает на нерегулярный ход изучаемой зависимости. Эта зависимость изображена на рисунке кривой линией. Те же данные при больших погрешностях опыта (рис. 1.5б) с успехом описываются пря- мой линией, так как только одно измерение отступает от этой прямой больше, чем на стандартную погрешность (и меньше, чем на две та- кие погрешности). То обстоятельство, что данные на рис. 1.5а требуют проведение кривой линии, а на рис. 1.5б не требуют, проясняется лишь при изображении результатов в виде креста погрешностей.

*Часто измерения проводятся с целью получения или подтвержде-* ния зависимостей между измеряемыми величинами. В этих случаях необходимо по экспериментальным точкам провести соответствующую зависимость и, если нужно, найти погрешности измеряемых величин по разбросу экспериментальных точек. Легче всего по эксперименталь- ным точкам проводить прямую линию. Поэтому если из теории или некоторых предположений известна возможная зависимость между из- меряемыми величинами, то по осям координат надо отложить такие функции измеряемых величин, которые лучше соответствуют линей- ной зависимости. Например, при исследовании зависимости времени падения тела в поле тяжести от высоты, с которой оно падает, по осям нужно отложить высоту и квадрат времени, так как в однородном по- ле тяжести без учёта сопротивления воздуха квадрат времени падения пропорционален высоте падения. Это особенно удобно, если требуется определить ещё и ускорение падения. Менее удобным было бы отклады- вание по осям времени и корня квадратного из высоты, хотя и в этом случае зависимость так же линейна. Отметим, что линейная зависи- мость должна получиться и при откладывании по осям координат ло- гарифмов времени и высоты. Но логарифмический масштаб в данном случае плох тем, что линейность сильно нарушается при небольших погрешностях в начале отсчёта времени и высоты. Логарифмический масштаб удобен в случае степенных зависимостей и больших диапа- зонов изменения переменных. Получающиеся линейные зависимости позволяют по графику найти показатель степенной зависимости.

*Графический метu,ц uбрабuтки экснериментаJьных ,цанных.* Существуют различные методы проведения прямых линий через экс- периментальные точки. Самый простой способ, пригодный для оценки результатов, состоит в использовании прозрачной линейки или про- зрачного листа с нарисованной на нём прямой линией. Благодаря про-



*\_lис. 1.6. 'рафический метод обработки результатов.*

*Oценка случайной погрешности параметра a*

*зрачности линейки видно сколько точек находится по обе стороны от* проводимой линии. Её надо провести так, чтобы по обе стороны бы- ло одинаковое количество экспериментальных точек. Параметры этой линии (наклон, пересечения с осями координат) измеряются непосред- ственно на графике. В результате получаем аналитическое выражение прямой *y* = *a* + *bx, которая в общем случае при a, не равном нулю, не* проходит через начало координат.

*Случайные погрешности определения a и b можно оценить по гра-* фику следующим образом. Для оценки погрешности *a находим величи-* ны, на которые надо параллельно сместить линию, чтобы число точек

*по обе стороны относилось, как* 1 : 2 *(рис. 1.6). То есть при смещении* линии вверх по *y на* ∆*a*1 *выше линии находится в два раза меньше* точек, чем ниже её, а при смещении вниз на ∆*a*2 *ниже её находится* в два раза меньше точек, чем выше. Если всего экспериментальных точек *n, то для оценки погрешности a имеем*

∆*a*1 + ∆*a*2

*σa* = √*n .*

*Для оценки погрешности коэффициента b надо диапазон изменения* координаты *x экспериментальных точек разделить на три равные ча-* сти и поворачивать линию таким образом, чтобы в крайних частях со- отношения числа точек на разных сторонах линии было 1 : 2 *(рис. 1.7).* То есть увеличиваем наклон линии до значения *b*1 *так, чтобы в левом*



*\_lис. 1.7. 'рафический метод обработки результатов.*

*Oценка случайной погрешности параметра b*

*крайнем участке над линией оказалось в два раза больше эксперимен-* тальных точек, чем под ней, а в правом крайнем участке под линией оказалось в два раза точек больше, чем над ней. Затем уменьшаем на- клон линии до *b*2 *так, чтобы в левом крайнем участке под линией было* в два раза больше точек, чем над ней, а в правом участке было под ли- нией в два раза меньше точек, чем над ней. Для оценки погрешности *b имеем*

*σ* = *b*1 − *b*2 *.*

√

*b*

*n*

*В случае зависимости y* = *kx, проходящей через начало координат,* для оценки погрешности коэффициента *k также надо диапазон изме-* нения координаты *x разбить на три равные части. Точки в ближайшей* к началу координат части не учитываются. Определяется *k*1*, при ко-* тором над линией находится точек в два раза меньше, чем под ней (из всех точек в средней и правой частях), и *k*2*, при котором соотно-* шение числа точек над и под линией противоположное. Для оценки погрешности *k имеем*

*σ* = *k*1 − *k*2 *.*

√

*k*

*n*

*Графический метод обработки измерений и оценки погрешности по-* лученного результата является предпочтительным в случае, когда ко- личество точек мало, и их погрешности их велики.

*Метu,ц наименьших кна,цратuн. Если число точек достаточно ве-* лико, а инструментальные погрешности измерения каждой точки ма- лы, то более точным и адекватным методом проведения прямой линии по точкам является метод наименьших квадратов, который основан на минимизации суммы квадратов отклонений точек от прямой. Это означает, что коэффициенты *a и b в линейной зависимости y* = *a* + *bx* *находятся из условия минимума функции*

*n*

L

*f* (*a, b*) = *yi*

*i*=1

− (*a* + *bx* ) 2*.*

*(1.34)*

*Здесь xi и yi - координаты экспериментальных точек.*

*i*

*Приведём окончательные формулы для a и b и их погрешностей* через средние значения *xi и yi:*

*b* = (*xy*Ь − (*x*Ь (*y*Ь *, (1.35)*

(*x*2Ь − (*x*Ь2

*a* = (*y*Ь − *b* (*x*Ь *. (1.36)*

*Погрешности этих коэффициентов соответственно равны:*

##### 1

*σb* ≈ √*n*

*y*2 *y* 2

*b*2*, (1.37)*

s ( Ь − ( Ь

2 −

(*x*2Ь − (*x*Ь

*σ* = *σ* ✓(*x*2Ь − (*x*Ь2*. (1.38)*

*b*

*a*

*Если известно, что точки должны описываться линейной зависимо-* стью *y* = *kx, проходящей через начало координат, то для коэффициен-* та *k и погрешности его определения получаем*

*k* = (*xy*Ь *, (1.39)*

(*x*2Ь

s(*x*2Ь (*y*2Ь − (*xy*Ь2 1 s (*y*2Ь

*σk* ≈

*n* (*x*2Ь2 = √*n*

(*x*2Ь

− *k*2*. (1.40)*

*Этот метод довольно трудоёмкий, но при наличии калькулятора* или компьютера он является наиболее предпочтительным.

*Бывают случаи, когда по экспериментальным точкам не надо на-* ходить описывающую их зависимость, а требуется определить лишь численное значение функции для переменной, лежащей где-то между

*Т а б л и ц а* *4*

## *Некuтuрые фuрмуJы нрибJи2Кённых нычисJений*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Формула* | *Точность 5%* | *Точность 1%* | *Точность 0,1%* |
| 1  1 + *a* ≈ 1 − *a*  √1 + *a* ≈ 1 + 1 *a*  2  1 1  √1 + *a* ≈ 1 − 2 *a*  *ea* ≈ 1 + *a* ln(1 + *a*) ≈ *a* sin *a* ≈ *a*  tg *a* ≈ *a* 2  *a*  cos *a* ≈ 1 − 2 | |*a*| *меньше* | |*a*| *меньше* | |*a*| *меньше* |
| *0,22* | *0,1* | *0,032* |
| *0,63* | *0,28* | *0,09* |
| *0,36* | *0,16* | *0,052* |
| *0,31* | *0,14* | *0,045* |
| *0,10* | *0,02* | *0,002* |
| *0,55* | *0,24* | *0,077* |
| *0,4* | *0,17* | *0,055* |
| *0,8* | *0,34* | *0,11* |
| (1 + *a*)(1 + *b*) *. . .* ≈ 1 + *a* + *b* + *. . .*  sin(*θ* + *a*) = sin *θ* + *a* cos *θ*  cos(*θ* + *a*) = cos *θ* − *a* sin *θ* | | | |

*экспериментальными точками. В таких случаях используются интерпо-* ляционные методы. В простейшем случае предполагается линейная за- висимость между соседними точками и используются значения в этих точках. Для интерполяции по параболе (метод Симпсона) требуются значения в трёх точках.

*Ещё раз подчеркнём, что графики необходимы для наглядного* представления результатов измерений. Они очень удобны для срав- нения результатов экспериментов и теорий, выяснения качественных особенностей зависимостей, быстрых оценок характера изменения ве- личин на отдельных участках. Однако документом эксперимента явля- ется таблица с экспериментальными данными.

*Вычисления не следует проводить точнее, чем это необходимо в* данном конкретном случае. Большую помощь при расчётах оказыва- ют формулы для приближённых вычислений, позволяющих во многих случаях значительно упростить расчёты. В таблице 4 приводится ряд таких формул. В последних графах таблицы приводятся значения пе- ременных, для которых написанные приближённые формулы обеспе- чивают указанную в заголовке графы точность.

*Отметим, что наши рекомендации по обработке результатов экс-* перимента не претендуют ни на полноту, ни на особую строгость, так

## *Снu,цка uснuнных фuрмуJ*

*Т а б л и ц а* *5*

|  |  |
| --- | --- |
| *Наилучшее значение измеряемой величины* | 1 I:*n*  *xнаил* = (*x*) = *xi*  *n i*=1 |
| *Oценка погрешности среднего значения измеряемой величины* | Г1 1 I:*n*  *σ* = (*xi* − (*x*))2  *n*(*n* − 1) *i*=1 |
| *Cложение погрешностей (независимых)* | *σ*2 = *σ*2 + *σ*2 + *. . .*  1 2 |
| *11огрешность результата расчёта* | *A* = *B* ± *C* ⇒ *σ*2 = *σ*2 + *σ*2  *A B C*  *A* = *B* · *C*} ( *σA* )2 ( *σB* )2 ( *σC* )2  ⇒ = +  *A* = *B/C A B C*  *β γ* ( *σA* )2 2 ( *σB* )2 2 ( *σC* )2  *A* = *B* · *C* ⇒ = *β* + *γ*  *A B C* |
| *Допустимые масштабы* | *1:1; 1:2; 1: ; 1:10; 1:20 ... 2:1; :1; 10:1; 20:1 ...* |
| *11роведение наилучшей прямой y* = *a* + *bx* | (*xy*) − (*x*) (*y*)  *b* = *, a* = (*y*) − *b* (*x*)  (*x*2) − (*x*)2 |
| *11роведение наилучшей прямой y* = *kx* | (*xy*)  *k* =  (*x*2 ) |

*как рассчитаны на студентов 1-го курса, чья математическая подготов-* ка недостаточна для строгого рассмотрения всех вопросов, связанных с математической статистикой. Более глубокое изложение станет воз- можным лишь после первых двух курсов обучения, когда накопится достаточный опыт экспериментальной работы и будет освоен соответ- ствующий математический аппарат. Поэтому часть формул, применя- емых для обработки экспериментальных результатов измерений, была приведена без вывода. Напомним о некоторых из них, включив в свод- ку основных формул (табл. 5).

*В заключение заметим, что при обработке результатов следует тща-* тельно обдумывать возможные источники ошибок, а промежуточные вычисления должны выполняться с точностью, превосходящей точ- ность измерений (обычно, на один знак больше), чтобы избежать вли- яния ошибок округления.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.: Наука, 1983.*

*2. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 3 / Под ред. Ю.М. Ципеню- ка. - М.: Изд-во МФТИ, 1998.*

*3. Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.: Мир, 1971.*

*4. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. - М.: Мир, 1985.*

## *Рабuта 1.1.1*

### *Определение систематических и случайных* погрешностей при измерении удельного сопротивления нихромовой проволоки

*Цель работы: измерить удельное сопротивление проволоки и вы- числить систематические и случайные погрешности при использова- нии таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.*

*В работе используются: линейка, штангенциркуль, микрометр, от- резок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.*

*Удельное сопротивление материала проволоки круглого сечения,* изготовленной из однородного материала и имеющей всюду одинако- вую толщину, может быть определено по формуле

*Rllр πd*2

*ρ* = *, (1)*

*l* 4

*где Rllр - сопротивление измеряемого отрезка проволоки, l - его дли-* на, *d - диаметр проволоки. Таким образом, для определения удельного* сопротивления материала проволоки следует измерить длину, диаметр и величину электрического сопротивления проволоки.

*При этом необходимо учесть, что при изготовлении проволоки не* удается строго выдержать постоянным ее диаметр. Он немного меняет- ся по длине, причем случайным образом. Поэтому в формулу (1) надо подставлять среднее по длине проволоки значение диаметра и учиты- вать в дальнейшем соответствующую случайную погрешность этого значения.

*В данной работе величину сопротивления Rllр предлагается изме-* рить с помощью одной из схем, представленных на рис. 1. Здесь *R -* переменное сопротивление (реостат), *RA - сопротивление амперметра,* *RV - сопротивление вольтметра, Rllр - сопротивление исследуемой*

*проволоки.*

*Пусть V и I - показания вольтметра и амперметра. Рассчитанные* по этим показаниям величины сопротивления проволоки *Rllр*1 = *Vа/Iа* для схемы (а) и *Rllр*2 = *Vб/Iб для схемы (б) будут отличаться друг* от друга и от искомого *Rllр из-за влияния внутренних сопротивлений* приборов. Однако с помощью рис. 1 нетрудно найти связь между со- противлением проволоки *Rllр и полученными значениями Rllр*1 *и Rllр*2*.*

#### E E



*R*

*A*

*RA*

*Rllр*

*RV*

*V*



*R*

*RA Rllр*

*A*

*RV*

*V*

*\_lис. 1. Cхемы для измерения сопротивления при помощи амперметра и вольтметра*

*В первом случае вольтметр правильно измеряет падение напряжения* на концах проволоки, а амперметр измеряет не величину прошедшего через проволоку тока, а сумму токов, проходящих через проволоку и через вольтметр. Поэтому

*R* = *Vа* = *R*

*RV*

*. (2)*

*llр*1

*I*

*а*

*llр Rllр*

+ *RV*

*Во втором случае амперметр измеряет силу тока, проходящего че-* рез проволоку, но вольтметр измеряет суммарное падение напряжения на проволоке и на амперметре. В этом случае

*R* = *Vб* = *R*

+ *R . (3)*

*llр*2

*I*

*б*

*llр A*

*Формулы (2) и (3) удобно несколько преобразовать. Для схемы (а):*

*R* = *R*

*llр*

*RV*  *Rllр*1

#### = ≈ *R*

*R*

*llр*1

*V*

− *Rllр*1

1 − (*Rllр*1

*/RV*

)

1 + *Rllр*1 *. (4)*

*Для схемы (б):*

*llр*1

*RV*

*Rllр*

= *Rllр*2

1 *RA . (5)*

*Rllр*2

−

*Члены, стоящие в скобках в формулах (4) и (5), определяют по-* правки, которые следует внести в измерения. Хотя поправки на сопро- тивление приборов в принципе всегда могут быть рассчитаны, этого,

*как правило, не делают. Расчет поправок, который в нашем случае ока-* зался несложным, при измерениях в разветвленных цепях становится очень трудоемким и при каждом переключении прибора должен произ- водиться заново, что практически невозможно. Таким образом, полу- чаем типичный пример систематической ошибки, возникающей из-за упрощения расчетной формулы. Для схемы (а) сопротивление *Rllр ока-* зывается заниженным, а для схемы (б) - завышенным относительно рассчитанного.

*Более точным методом измерения сопротивлений является класси-* ческий метод моста постоянного тока (мост Уитстона). Для контроль- ного измерения сопротивления проволоки используется стандартный мост Р4833.

*В нашей установке в качестве сопротивления используется нихро-* мовая проволока, натянутая между двумя неподвижными плоскими прижимными контактами. Вдоль проволоки может перемещаться по- движный контакт, с помощью которого устанавливается длина измеря- емого участка.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с устройством и работой измерительных инструментов* и приборов. Поупражняйтесь в измерениях размеров различных пред- метов с помощью штангенциркуля и микрометра.

*2. Измерьте диаметр проволоки на 8-10 различных участках и запишите* измерения в таблицу. Сравните результаты, полученные при измерени- ях микрометром и штангенциркулем. Усредните полученные значения диаметра. Рассчитайте площадь поперечного сечения проволоки, оце- ните погрешность результата.

*3. Составьте таблицу основных характеристик амперметра и вольтметра:* система прибора, класс точности, предел измерений *xn, число делений* шкалы *n, цена деления xn/n, чувствительность n/xn, абсолютная по-* грешность ∆*xM , внутреннее сопротивление прибора (на данном преде-* ле измерений).

*4. Используя значения внутренних сопротивлений, указанных на прибо-* рах, и зная, что сопротивление проволоки по порядку величины равно

*5 Ом, оцените с помощью формул (4) и (5) величину поправок при* измерениях *Rllр по схемам рис. 1. Для работы выберите ту из схем,* которая приводит к меньшей поправке.

*5. Измерьте с помощью линейки длину исследуемого участка проволоки* (между подвижным и неподвижным прижимными контактами) и собе- рите выбранную электрическую схему. Включите ток. Изменяя его с помощью реостата, запишите в виде таблицы показания амперметра и

*вольтметра в 5-6 точках (как правило, в процессе измерений показания* приборов записывают в делениях шкалы без какой-либо обработки):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Nизм* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| *V , дел* |  |  |  |  |  |  |
| *I, дел* |  |  |  |  |  |  |
| *V , В* |  |  |  |  |  |  |
| *I, А* |  |  |  |  |  |  |

*Проведите измерения при возрастающих и убывающих значениях* тока. Постройте график зависимости *V* = *f* (*I*) *и с его помощью рас-* считайте измеренную величину сопротивления *R, а затем вычислите* искомое *Rllр. Оцените, с какой ошибкой найдена величина Rllр.*

*6. Измерьте сопротивление проволоки с помощью моста Р4833. Насколь-* ко отличается найденное вами значение от ранее измеренного? Укла- дывается ли погрешность в оцененную вами ранее ошибку измерений с помощью вольтметра и амперметра?

*7. Проведите измерения по пп. 5, 6 для трех различных длин проволоки.*

*8. Определите удельное сопротивление проволоки по формуле (1). Оце-* ните допущенную при этом погрешность. С какой точностью следует измерять сопротивление проволоки при достигнутой точности измере- ния ее длины и поперечного сечения?

*9. Сравните полученные результаты с табличными значениями.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.: Наука, 1983. С. 53366.*

*2. Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.: Мир, 1971.*

*3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. - М.: Наука, 1996. §§ 40, 41, 42.*

### *Образец отчета о выполнении работы* *1.1.1*

*В работе используются: линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоян- ного тока, реостат, ключ.*

*1. Точность измерения с помощью штангенциркуля - 0,1 мм. Точность измерения с помощью микрометра - 0,01 мм.*

*2. Измеряем диаметр проволоки штангенциркулем (d*1*) и микрометром (d*2 *) на 10 различных участках (табл. 1).*

*Т а б л и ц а* *1*

*Результаты измерения диаметра проволоки*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *d*1*, мм* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* | *0,4* |
| *d*2*, мм* | *0,36* | *0,36* | *0,37* | *0,36* | *0,37* | *0,37* | *0,36* | *0,35* | *0,36* | *0,37* |
|  | *d*¯1 = 0*,*4 *мм d*¯2 = 0*,*363 *мм* | | | | | | | | | |

*При измерении диаметра проволоки штангенциркулем случайная по- грешность измерения отсутствует. Следовательно, точность результата опре- деляется только точностью штангенциркуля (систематической погрешно- стью):*

*d*1 = (0*,*4 ± 0*,*1) *мм.*

*Измерения с помощью микрометра содержат как систематическую, так и случайную погрешности:*

1 *n* 1 ✓

*σсист* = 0*,*01 *мм, σсл* = *N*

*i*=1

−3

(*d d*¯)2 =

10

−

4*,*1 · 10−4 ≈ 2 · 10

*мм,*

2

*σ* = ✓*σ*

*сист*

2 = ✓(0*,*01)2 + (0*,*002)2 ≈ 0*,*01 *мм.*

*Поскольку σ*2

+ *σ*

*сл*

*сл*

≪ *σсист*

*, то можно считать проволоку однородной по диамет-*

*ру, а погрешность диаметра σd определяется только σсист микрометра:*

2

*d*2 = *d*¯2 ± *σ* = (0*,*363 ± 0*,*010) *мм* = (3*,*63 ± 0*,*10) · 10−2 *см.*

*d*

*3. Определим площадь поперечного сечения проволоки:*

*πd*2

2

*S* = = 4

3*,*14 · (3*,*63 · 10−2)2

4

≈ 1*,*03 · 10−3 *см*2*.*

*Величину погрешности σS найдем по формуле*

*σ* = 2 *σd S* = 2 0*,*01 · 1*,*03 · 10−3 ≈ 6 · 10−5 *см*2*.*

*S*

*d*

0*,*36

*Итак, S* = (1*,*03 ± 0*,*06) · 10−3 *см*2*, т. е. площадь поперечного сечения проволоки определена с точностью 6%.*

*4. Сведем основные характеристики приборов в таблицу 2.*

*Т а б л и ц а* *2*

*Основные характеристики приборов*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *Вольтметр* | *Миллиамперметр* |
| *Система* | *Магнитоэлектрическая* | *Электромагнитная* |
| *Класс точности* | *0,5* | *0,5* |
| *Предел измерений xп* | *0,3 В* | *0,15 А* |
| *Число делений шкалы n* | *150* | *75* |
| *Цена делений xп/n* | *2 мВ/дел* | *2 мА/дел* |
| *Чувствительность n/xп* | *500 дел/В* | *500 дел/А* |
| *Абсолютная погреш-* | *1,5 мВ* | *0,75 мА* |
| *ность* ∆*xM* |  |  |
| *Внутреннее сопротивле-* | *500 Ом* | *1 Ом* |
| *ние прибора (на данном* |  |  |
| *пределе измерений)* |  |  |

*5. Известно, что Rпр* ≈ 5 *Ом, RV* = 500 *Ом, RA* = 1 *Ом. Оценим по формулам (4) и (5) величину поправок при измерении Rпр:*

*для схемы рис. 1а Rпр/RV* = 5*/*500 = 0*,*01*, т. е. 1%, для схемы рис. 1б RA/Rпр* = 1*/*5*, т. е. 20%.*

*Вывод: при измерении относительно небольших сопротивлений меньшую ошибку дает схема рис. 1а.*

*6. Собираем схему рис. 1а.*

*7. Опыт проводим для следующих трех длин проволоки:*

*l*1 = (20*,*0 ± 0*,*1) *см, l*2 = (30*,*0 ± 0*,*1) *см, l*3 = (50*,*0 ± 0*,*1) *см.*

*Измерения ведем при возрастающих и убывающих значениях тока. Пока- зания приборов записываем в табл. 3. Результаты измерения сопротивлений с помощью моста Р4833 заносим в табл. 4.*

*8. Строим графики зависимостей V* = *f* (*I*) *для всех трех отрезков прово- локи, проводя прямые через экспериментальные точки (рис. 2). Из графиков*

*видно, что нет различия между значениями, полученными при возрастании и при уменьшении тока.*

*9. Для каждой длины l расчёт проводим методом наименьших квадра- тов для прямой, проходящей через начало координат. Сопротивление нахо-*

*дим как Rср* = (*V I*) *(формула (1.39)) и его среднеквадратичную случайную*

(*I*2)

1

*ошибку как σслуч* = 1

(*V* 2 ) − *R*2 *, где 12 - число экспериментальных*

*R c*

√12

(*I*2 )

*точек (формула (1.40)). Результаты запишем в табл. 4.*

*ср*

*10. Возможную систематическую погрешность Rср оцениваем по форму-*

*ле*

*сист*

*σ*

*R c*

= 1 *σV*

+ *σI ,*

*Rср V* *I*

2

2

*Т а б л и ц а* *3*

## *Пuказанин нuJьтметра и амнерметра*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *l* = 20 *см* | | | | *l* = 30 *см* | | | | *l* = 50 *см* | | | |
| *V ,* | *I,* | *V ,* | *I,* | *V ,* | *I,* | *V ,* | *I,* | *V ,* | *I,*  *дел*  0*,*5  *мА*  *дел* | *V ,* | *I,* |
| *дел*  2  *мВ* | *дел*  2  *мА* | *мВ* | *мА* | *дел*  2  *мВ* | *дел*  2  *мА* | *мВ* | *мА* | *дел*  2  *мВ* | *мВ* | *мА* |
| *дел* | *дел* |  |  | *дел* | *дел* |  |  | *дел* |  |  |
| *26,0* | *12,5* | *52,0* | *25,0* | *26,0* | *8,5* | *52,0* | *17,0* | *34,5* | *28,0* | *69,0* | *14,0* |
| *32,5* | *15,5* | *65,0* | *31,0* | *35,0* | *11,5* | *70,0* | *23,0* | *44,1* | *35,6* | *88,2* | *17,8* |
| *63,2* | *31,1* | *126,4* | *62,2* | *62,5* | *20,4* | *125,0* | *40,8* | *67,1* | *54,5* | *134,2* | *27,3* |
| *82,8* | *40,5* | *165,6* | *81,0* | *91,1* | *30,1* | *182,2* | *60,2* | *98,0* | *79,6* | *196,0* | *39,8* |
| *119,5* | *58,1* | *239,0* | *116,2* | *118,5* | *38,9* | *237,0* | *77,8* | *127,0* | *103,3* | *254,0* | *51,7* |
| *137,8* | *67,0* | *275,6* | *134,0* | *150,0* | *49,5* | *300,0* | *99,0* | *147,3* | *120,0* | *294,6* | *60,0* |
| *131,0* | *64,1* | *262,0* | *128,2* | *139,5* | *46,1* | *279,0* | *92,2* | *142,0* | *114,6* | *284,0* | *57,8* |
| *101,5* | *49,5* | *203,0* | *99,0* | *130,0* | *42,9* | *260,0* | *85,8* | *116,2* | *94,0* | *232,4* | *47,0* |
| *88,1* | *43,0* | *176,2* | *86,0* | *103,1* | *34,0* | *206,0* | *68,0* | *85,0* | *69,2* | *170,0* | *34,6* |
| *78,2* | *38,1* | *156,4* | *76,2* | *74,2* | *24,5* | *148,4* | *49,0* | *61,1* | *49,5* | *133,2* | *24,8* |
| *51,0* | *24,9* | *102,0* | *49,8* | *42,5* | *14,1* | *85,0* | *28,2* | *41,3* | *33,2* | *82,6* | *16,6* |
| *29,1* | *13,9* | *58,2* | *27,8* | *23,0* | *7,5* | *46,0* | *15,0* | *31,0* | *25,2* | *62,0* | *12,6* |

*Т а б л и ц а* *4*

## *РезуJьтаты измеренин сuнрuтинJенин* нрuнuJuки

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *l* = 20 *см* | *l* = 30 *см* | *l* = 50 *см* |
| *R*0 = 2*,*080 *Ом (по Р4833)*  *Rср* = 2*,*060 *Ом*  *Rпр* = 2*,*068 *Ом*  *σслуч* = 0*,*008 *Ом*  *R*  *σсист* = 0*,*008 *Ом*  *R*  *σR* = 0*,*011 *Ом* | *R*0 = 3*,*062 *Ом (по Р4833)*  *Rср* = 3*,*026 *Ом*  *Rпр* = 3*,*044 *Ом*  *σслуч* = 0*,*008 *Ом*  *R*  *σсист* = 0*,*014 *Ом*  *R*  *σR* = 0*,*016 *Ом* | *R*0 = 5*,*010 *Ом (по Р4833)*  *Rср* = 4*,*88 *Ом Rпр* = 4*,*93 *Ом σслуч* = 0*,*07 *Ом*  *R*  *σсист* = 0*,*04 *Ом*  *R*  *σR* = 0*,*08 *Ом* |

*где I и V - максимальные значения тока и напряжения, полученные в экс- перименте, а σV и σI - ошибки измерения вольтметром и амперметром. Ошибка σV равна половине абсолютной погрешности вольтметра:*

*σ* = ∆*x* = 1*,*5 ≈ 0*,*75 *мВ.*

*V*

2

2

*Аналогично для амперметра σI* = 0*,*75*/*2 ≈ 0*,*4 *мА.*

*Пример расчета σR для проволоки длиной l* = 30 *см, из табл. 3 и 4*

*c*



*\_lис. 2*

*Rср* = 3*,*030 *Ом, V* = 300 *мВ, I* = 99 *мА.*

*σR c*

= *Rср*

1 *σV*  2

*V*

*σI* 2

*I*

= 3*,*03 ·

0*,*75 2

+

s

300

0*,*4 2

99

≈ 1*,*4 · 10−2 *Ом.*

*Складываем случайную и систематическую ошибки по формуле σR* =

✓

*R*

*R*

+

= (*σслуч*)2 + (*σсист*)2 *и результаты расчетов заносим в табл. 5.*

*Т а б л и ц а* *5*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *l, см* | *20* | *30* | *50* |
| *Rср, Ом* | *2,060* | *3,026* | *4,88* |
| *σR, Ом* | *0,011* | *0,016* | *0,08* |

*11. Для всех трех длин l вносим поправку в измеренное значение сопро-*

*тивления по формуле*

*Rпр* = *Rср* +

*R*2

*ср .*

*RV*

*Ввиду малости поправки считаем σR* = *σR . Данные заносим в табл. 4.*

*пc c*

*12. Сравниваем результаты измерения сопротивления проволоки с по- мощью вольтметра и амперметра с результатами измерений мостом Р4833. В пределах погрешностей опыта результаты совпадают.*

*13. Определяем удельное сопротивление проволоки по формуле (1) и по- грешность σρ по формуле*

*σρ* =

*ρ*

1 *σR* 2

*R*

*σd* 2

2

*d*

*σl* 2

*l*

*и заносим результаты в табл 6.*

+

+

*Т а б л и ц а* *6*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *l, см* | *ρ, 10*−4 *Ом*·*см* | *σ , 10*−6 *Ом*·*см*  *ρ* |
| *20* | *1,06* | *6* |
| *30* | *1,05* | *6* |
| *50* | *1,02* | *6* |

*Окончательно: ρ* = (1*,*04 ± 0*,*06) · 10−4 *Ом*·*см.*

*Основной вклад в ошибку σρ вносит погрешность измерения диамет- ра проволоки, составляющая* ∼*3%, но так как из-за возведения в квадрат*

*она удваивается, вклад в погрешность окончательного результата составля- ет* ∼*6%. Поэтому при измерении сопротивления проволоки достаточна точ- ность 334%.*

*Полученное значение удельного сопротивления сравниваем с табличны- ми значениями. В справочнике (Физические величины. М.: Энергоиздат, 1991. С. 444) для удельного сопротивления нихрома при 20* ◦*С значения в зависимости от массового содержания компонент сплава меняются от 1,12*·*10*− *Ом*·*см до 0,97*·*10 Ом*·*см. Наиболее близкое значение к получив-*

4

4 −4

*шемуся в работе 1,06*·*10*− *Ом*·*см для сплава: 70*÷*80% Ni, 20% СI', 0*÷*2% Mn*

*(проценты по массе).*

## *Рабuта 1.1.2*

### *Измерение коэффициента линейного* расширения стержня с помощью микроскопа

*Цель работы: определить зависимость линейного расширения ме- таллического стержня от температуры. Вычислить коэффициент ли- нейного расширения.*

*В работе используются: микроскоп, объектная шкала, окулярный микрометр, линейка с миллиметровыми делениями, кварцевая труб- ка с меткой, исследуемый металлический стержень, электронагрева- тель, трансформатор (ЛАТР), термометр сопротивления, техниче- ский мост постоянного тока типа Р4833, источник ЭДС, гальвано- метр.*

*Микрuскuн. Микроскопом называется оптический прибор, позволя-* ющий получать сильно увеличенные изображения мелких предметов. Увеличивающая система микроскопа состоит из двух наборов линз - объектива и окуляра, укрепленных в тубусе микроскопа и разнесен- ных на сравнительно большое расстояние друг от друга (обычно около 160 мм). В нашу задачу не входит детальное изучение устройства мик- роскопа, поэтому ограничимся исследованием принципа его действия. Заменим объектив и окуляр двумя эквивалентными линзами, которые для простоты будем считать тонкими.

*Ход лучей в оптической системе микроскопа изображен на рис. 1.* Исследуемый предмет *l помещается вблизи (несколько впереди) перед-* него фокуса короткофокусного объектива Л1*, создающего сильно уве-* личенное действительное изображение *l*1*. Это изображение рассмат-* ривается через окуляр Л2*, как через лупу. Окуляр создает мнимое* изображение предмета *l*2*, которое располагается на удобном от глаза* наблюдателя расстоянии. Наблюдатель передвигает *l*2*, меняя располо-* жение *l*1 *относительно переднего фокуса окуляра. Это передвижение* осуществляется путем незначительного перемещения микроскопа по отношению к предмету.

*Важнейшей характеристикой микроскопа является его увеличение.* Различают линейное и угловое увеличение микроскопа. Линейное уве- ли'Чение равно отношению поперечных размеров изображения *l*2 *и* предмета *l:*

*l*2

Γ = *. (1)*

*l*

*угловое увели'Чение равно отношению тангенса угла α*1*, под которым* видно изображение *l*2 *в микроскопе, к тангенсу угла α*2*, под которым*



*\_lис. 1. Ход лучей в микроскопе*

*виден сам предмет l невооруженным глазом на расстоянии наилучшего* зрения *D* = 25 *см:*

##### tg *α*1

*γ* =

##### tg *α*2

*. (2)*

*Обозначения l, l*1*, l*2*, α*1 *и α*2 *ясны из рис. 1.*

*Рассмотрим сначала линейное увеличение* Γ *микроскопа. Предста-* вим его в виде

*l*2 *l*2 *l*1

Γ = *l* = *l*1 *l* = Γ*ок*Γ*об. (3)*

*Первый из сомножителей* Γ*ок называется увели'Чение.м окуляра, а вто- рой* Γ*об - увели'Чение.м обвектива. Из рис. 1 ясно, что*

*l*1 *O*1*B*

Γ*об* =

= *. (4)*

*l O*1*A*

*Расстояние O*1*A мало отличается от фокусного расстояния объектива,* а точка *B лежит вблизи фокуса окуляра, причем f*2 ≪ *H, так что*

*O*1*A* ≈ *f*1*, O*1*B* ≈ *H* − *f*2 ≈ *H. (5)*

*Длина тубуса микроскопа H обычно равна 160 мм. Заменяя в (4) числи-*

*тель и знаменатель их приближенными значениями (5), найдем число*

*H*

Γ*об* ≈ *f*1 *, (6)*

*которое не вполне точно определяет увеличение объектива, но зато не* зависит ни от выбора окуляра, ни от настройки микроскопа. Это число выбито на оправе объектива.

*Перейдем теперь к увеличению окуляра:*

*l*2 *O*2*C*

Γ*ок* = *l*1 = *O*2*B. (7)*

*Как уже отмечалось, O*2*B f*2*. Что же касается O*2*C, то оно зави-* сит от настройки микроскопа. Близорукие наблюдатели устанавлива- ют *O*2*C* = 10 15 *см, а дальнозоркие отодвигают l*2 *на расстояние*

≈

−

*40 см, иногда даже на бесконечное расстояние. При определении увели-* чения окуляра принято полагать *O*2*C* = *D* = 25 *см, что соответствует* расстоянию наилучшего зрения для нормального человеческого глаза.

*Подставляя эти значения в (7), получим*

*D*

Γ*ок* = *f*2 *. (8)*

*Это число называется увеличением окуляра и выбито на его оправе.*

*Перейдем теперь к углово.му увели'Чению:*

*γ* = tg *α*1 : tg *α*2 =

*l*2 *O*2*C*

*l*

: *. (9)*

*D*

*При O*2*C* = *D угловое и линейное увеличения микроскопа равны друг* другу: Γ = *γ.*

*Как видно из формулы (3), для первоначальной оценки увеличения* микроскопа достаточно перемножить увеличения окуляра и объекти- ва. Полученная при этом величина определяет увеличение микроскопа крайне грубо. Более надежное значение следует получать эксперимен- тально.

*При практических измерениях величина предмета сравнивается с* некоторым масштабом. Масштаб можно расположить в плоскости из- меряемого предмета, однако во многих случаях это оказывается неудоб- ным. Чаще всего масштаб помещается в плоскости промежуточного изображения предмета - в плоскости *l*1*. В этом случае предмет и мас-* штаб видны одновременно и, следовательно, могут быть надежно сопо- ставлены друг с другом. При таком измерении, однако, с масштабом сравнивается не сам предмет, а его увеличенное изображение *l*1*, что* приводит к необходимости проводить дополнительную калибровку.

*\_lис. 2. Шкала окулярного микрометра*

*ОкуJнрный микрuметр. Применяемый в* данной работе микроскоп снабжен окуляр- ным микрометром: в фокальной плоскости окуляра расположены неподвижная стек- лянная пластинка со шкалой и подвижная стеклянная пластинка с перекрестьем и дву- мя рисками (рис. 2). Подвижная пластин- ка перемещается относительно неподвиж- ной шкалы: при повороте микрометриче- ского винта на один оборот риски и пере- крестье сдвигаются на одно деление шкалы (1 дел = 1 мм). Окружность барабана винта разделена на 100 делений. Поворот бараба-

*на на одно деление перемещает перекрестье и риски на 0,01 мм. Таким* образом, масштабом в плоскости изображения *l*1 *(фокальная плоскость* окуляра) является шкала окулярного микрометра.

*Для того чтобы определить размер самого предмета l, надо, не пере-* страивая микроскоп, проградуировать шкалу окулярного микрометра

*в делениях другого масштаба, располагаемого на месте исследуемого* предмета. Таким масштабом является нанесенная на стекле объектная шкала, которая обычно разделяется на сотые доли миллиметра.

*Гра,цуирuнка uкуJнрнuй шкаJы. Градуировка окулярной шкалы* производится перед началом работы с микроскопом в следующем по- рядке. Прежде всего нужно добиться того, чтобы окулярная шкала была видна ясно и четко: юстировку производят, поворачивая опра- ву наружной линзы окуляра. Затем на столик микроскопа помещают нанесенную на стеклянную пластинку объектную шкалу. Объектная шкала лучше всего видна в микроскоп, если свет падает на нее пер- пендикулярно штрихам под углом к плоскости стеклянной пластинки. Затем нужно получить четкое изображение объектной шкалы в микро- скопе. Для этого тубус микроскопа сначала перемещают вниз винтом грубой наводки почти до упора в объект. За расстоянием между пред- метом и объективом удобно следить, помещая глаз сбоку в плоскости рассматриваемого объектаl. Наблюдая в микроскоп, .медленно подни- мают тубус винтом грубой наводки до тех пор, пока в поле зрения не мелькнет изображение шкалы, и завершают перемещение тубуса, по- ворачивая винт точной наводки до тех пор, пока не будет получено

*1 Oбращаем особое внимание студентов на то, что при отсутствии контроля сбо- ку тубус микроскопа можно передвигать только вверх. 11ри движении вниз нетруд- но проскочить правильное расстояние, и объектив упрется в рассматриваемый объ- ект, - объект или объектив при этом могут быть испорчены.*





*\_lис. 3. Установка для измерения коэффициента линейного расширения*

*резкое изображение шкалы. После этого шкалу нужно сдвинуть в се-* редину поля зрения. Освещение объектной шкалы следует подобрать так, чтобы в поле зрения микроскопа были одинаково хорошо видны объектная и окулярная шкалы.

*Точность совмещения изображений окулярной и объектной шкал* проверяется методом параллакса. В том случае, когда изображения действительно лежат в одной плоскости, небольшие боковые смещения глаза не приводят к их сдвигу относительно друг друга. Если сдвиг наблюдается, положение тубуса слегка поправляется винтом точной наводки до устранения параллакса.

*Поворачивая и сдвигая объектную шкалу на предметном столике,* следует установить ее так, чтобы деления обеих шкал были параллель- ны. Вращая микрометрический винт окуляра, совмещают центр пере- крестья с каким-либо делением объектной шкалы. Записывают это де- ление и число делений на барабане микрометра. Затем смещают пере- крестье вдоль объектной шкалы на несколько миллиметров, вращая микрометрический винт окуляра, и вновь отмечают показания по оку- лярной шкале и барабану микрометра. После этого нетрудно найти

*<цену деления> окулярной шкалы, т. е. измеренный в плоскости объек-* та размер, соответствующий одному делению окулярной шкалы. Такие измерения следует выполнить три-четыре раза, записать их в таблицу и усреднить полученные результаты.

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Установка, служащая для опреде-* ления коэффициента линейного расширения, изображена на рис. 3. Ис- следуемый стержень помещен в стальную трубу, внутри которой смон- тирована электрическая печь. Правый конец трубы с помощью винта жестко прикреплен к стойке, другой ее конец поддерживается в стойке

*так, что может свободно перемещаться вдоль своей оси. В торцах тру-* бы сделаны отверстия, в которые входит исследуемый металлический стержень С. Через отверстие в торце 1 стержень проходит свободно, а в отверстии торца 2 закрепляется винтом 3.

*Между выходящим из торца 1 концом стержня и пружинным упо-* ром 4, укрепленным на стойке 5, устанавливается кварцевая2 трубка Т с меткой.

*Электрическая печь питается переменным током от автотрансфор-* матора (ЛАТР). Температура стержня измеряется термометром сопро- тивления, представляющим собой медную проволоку, намотанную на исследуемый стержень по всей длине.

*Обычно нагревание стержня (а следовательно, и проволочного тер-* мометра) ведется от комнатной температуры *tк, которой соответствует* сопротивление проволоки *Rк. Зависимость сопротивления проволоки* от температуры имеет вид

*Rt* ≈ *Rк*(1 + Θ(*t* − *tк*))*, (10)*

*где* Θ *- температурный коэффициент сопротивления (для меди* Θ =

= 4*,*3 · 10−3 ◦*C* −1 *при 20* ◦*C), откуда*

∆*t* = *t* − *tк*

= *Rt* − *Rк . (11)*

Θ*Rк*

*При нагревании стержень удлиняется, и метка на кварцевой трубке* смещается. Смещение метки измеряется с помощью микроскопа, снаб- женного окулярным микрометром. Коэффициент линейного расшире- ния стержня определяется по формуле

*α* = *Lt* − *Lк , (12)*

*Lк*(*t* − *tк*)

*где Lt и Lк - длины стержня при температурах t и tк соответственно.* Подставляя разность температур *t tк из формулы (11), получаем* окончательно

−

*α* = (*Lt* − *Lк*)*Rк* Θ = *Rк* ∆*L* Θ = *Rк* ∆*n B*Θ*, (13)*

*Lк*(*Rt* − *Rк*) *Lк* ∆*R Lк* ∆*R*

*где B - цена деления окулярной шкалы,* ∆*n - смещение в делениях* окулярной шкалы.

*2 11лавленый кварц обладает ничтожным по сравнению с металлами коэффици- ентом линейного расширения.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с устройством микроскопа и окулярного микрометра.*

*2. Проградуируйте шкалу окулярного микроскопа по объектной шкале* (найдите цену деления окулярной шкалы).

*3. Установите на предметном столике микроскопа вместо объектной шка-* лы кварцевую трубку *T , укрепленную на торце исследуемого стержня.* Получите в микроскопе четкое изображение метки на трубке *T .* Подумайте, какое положение должно занимать изображение метки на окулярной шкале, чтобы при расширении стержня изображение метки не вышло из поля зрения микроскопа. Отметьте положение метки на

*окулярной шкале при комнатной температуре.*

*4. Ознакомьтесь с устройством технического моста Р4833 и подготовьте* его к работе.

*5. Подсоедините термометр сопротивления к мосту и измерьте его сопро-* тивление *Rк при комнатной температуре стержня. Отметьте показания* комнатного термометра *tк.*

*Подберите такой режим работы моста, при котором его чувстви-* тельность максимальна.

*6. Снимите зависимость изменения длины исследуемого стержня от тем-* пературы (т. е. от сопротивления медной проволоки). Для этого под- ключите электрическую печь к выходным клеммам автотрансформа- тора. Ручкой автотрансформатора установите на выходе небольшое напряжение и подождите, пока стержень прогреется. Измерьте сопро- тивление термометра мостом Р4833 и отметьте положение перекрестья на окулярной шкале.

*Постепенно увеличивая выходное напряжение автотрансформато-* ра, измеряйте величины сопротивления и соответствующие им поло- жения перекрестья.

*7. Полученные экспериментальные результаты изобразите на графике в* координатах *n (положение перекрестия) и R (величина сопротивле-* ния). Проведите через экспериментальные точки наилучшую прямую и графически определите угловой коэффициент прямой ∆*n/*∆*R. Найди-* те величину ∆*n/*∆*R и погрешность δ*(∆*n/*∆*R*) *по методу наименьших* квадратов (см. с. 39).

*8. Поставьте найденное отношение в формулу (13) и определите коэффи-* циент линейного расширения *α. Длина исследуемого стержня указана* на установке.

*9. Оцените погрешность, допущенную при определении α.*

*В приложении к работе приведена примерная схема обработки ре-* зультатов.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. С какой точностью следует измерять длину стержня и сопротивление тер- мометра при достигнутой точности измерения* ∆*L?*

*2. Какой вклад в ошибку измерения α вносят погрешности в измерении цены деления окулярной шкалы, в определении положения метки, в измерении комнатной температуры и погрешность температурного коэффициента со-*

*противления?*

*3. Близорукие и дальнозоркие наблюдатели настраивают микроскоп так, что изображение l*2 *оказывается на очень малом или, наоборот, очень большом расстоянии от глаза. Какое из увеличений - линейное или угловое - при этом меньше меняется?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Элементарный учебник физики. Т. 1. Механика. Теплота. Молекулярная физика / Под ред. Г.С. Ландсберга. - М.: Физматлит, 2000. §§ 195,* *197.*

*Т. III. Колебания, волны, оптика. Строение атома. §§ 115, 116.*

*2. Ландсберг Г.С. Оптика. - М.: Наука, 1976. Гл. XIV, § 92.*

*3. Калашников С.Г. Электричество. - М.: Наука, 1977. Гл. VI, §§ 59, 60.*

### *Образец отчета о выполнении работы* *1.1.2*

1. *Градуировка шкалы окулярного микрометра по объектной шкале. Объ- ектная шкала имеет длину 1 мм = 100 делений.*

*Т а б л и ц а* *1*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n (число делений окулярной шкалы)* | | ∆*ni* | ∆*n* |
| *при l* = 0 | *при l* = 0*,*5 *мм* |
| *1,44* | *6,12* | *4,68* |  |
| *1,35* | *6,08* | *4,73* | *4,70* |
| *1,52* | *6,21* | *4,69* |  |

*Цена деления шкалы окулярного микрометра*

*B* = ∆*l* = 0*,*50 *мм* = 1*,*06 · 10−1 *мм/дел.*

∆*n* 4*,*70 *дел*

*Относительная ошибка цены деления*

*δB* =

*B*

s *δl* 2

∆*l*

*δn* 2

+ *,*

∆*n*

*где δl* ≈ 0*,*005 *мм (половина цены деления объектной шкалы), а полная ошибка окулярной шкалы:*

*δn* = ✓(*δn*1 )2 + (*δn*2 )2*,*

*определяемая систематической ошибкой δn*1 = 0*,*005 *деления (половина цены деления шкалы микрометра) и случайной ошибкой*

2 1

*m*

2 −2

*δn* = *m*(*m* − 1)

*i*=1

∆*ni* − ∆*n*

= 1*,*2 · 10

*дел.*

*Таким образом,*

*δn* = ✓(1*,*2)2 + (0*,*5)2 · 10−2 ≈ 1*,*3 · 10−2 *дел,*

s

*δB* =

*B*

0*,*005 2

+

0*,*5

0*,*013 2

4*,*7

≈ 0*,*01 = 1%*.*

*Окончательно цена деления шкалы окулярного микрометра*

*B* = (1*,*06 ± 0*,*01) · 10−1 *мм/дел.*

1. *Измерение сопротивления термометра производится при комнатной*

*температуре tк* = 22 ◦C*. На мосте постоянного тока Р4833 установлено от- ношение плеч N* = 1*, Rк* = 49*,*29 ± 0*,*01 *Ом. Положение метки по окулярной шкале nк* = 1*,*88 *дел.*

1. *Результаты измерений зависимости удлинения стержня от температу- ры представлены в таблице 2 и на графике (рис. 4).*

*Т а б л и ц а* *2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *R, Ом* | *n, дел* | *R, Ом* | *n, дел* | *R, Ом* | *n, дел* |
| *49,25* | *1,88* | *52,81* | *3,65* | *55,74* | *5,05* |
| *49,85* | *2,17* | *53,11* | *3,73* | *56,06* | *5,14* |
| *50,15* | *2,31* | *53,81* | *4,08* | *56,25* | *5,24* |
| *50,93* | *2,75* | *54,51* | *4,46* | *56,58* | *5,40* |
| *51,50* | *2,95* | *55,05* | *4,74* | *56,97* | *5,58* |
| *52,18* | *3,28* | *55,29* | *4,82* | *57,11* | *5,67* |

*По графику определяем угловой коэффициент прямой:*

∆*n* = 5*,*67 − 1*,*88

= 0*,*482 *дел/Ом.*

∆*R* 57*,*11 − 49*,*25

*Коэффициент линейного расширения находим по формуле (13). Замечая,*

3 ◦C−1 *при t* = 20 C*, получаем*

*к*

*что Lк* = (600 ± 1) *мм,* Θ = 4*,*30 · 10− ◦

*Найти погрешность измерения* ∆*n/*∆*R по графику не удается, посколь-*

*ку точки очень хорошо ложатся на прямую линию. Это означает, что име- ет смысл применить более точный метод обработки результатов - метод*





*\_lис. 4. 'рафик зависимости удлинения стержня от показания термометра сопротивлений*

*наименьших квадратов. Задача заключается в нахождении наилучшего зна- чения b в формуле nt* = *a* + *bRt и погрешности этого коэффициента δb.*

*Вычисление (см. (1.35) и (1.37)) дает*

*b* = (*Rn*) − (*R*) (*n*) = 0*,*477 *дел/Ом,*

2 2

(*R* ) − (*R*)

1 / (*n*2 ) − (*n*)2

2

*δb* = √*m*

)

(*R*2) − (*R* 2 − *b*

= 0*,*011 *дел/Ом.*

*Коэффициент линейного расширения определяется по формуле (13):*

49*,*25 · 0*,*477 · 0*,*106 · 4*,*3 · 10−3

*α* =

*Относительная ошибка*

/

600

= 1*,*785 · 10−5 ◦C−1*.*

*δα* =

*α*

2

*δRк* +

*Rк*

2

*δLк*

*Lк*

*δ*Θ 2

Θ

*δB* 2

*B*

*δb* 2

*b*



2

/

+

+

+

≈

1

≈ 106 +

105 2

4771

≈ 0*,*024 = 2*,*4%*.*

*Абсолютная ошибка*

*δα* = *α* · 0*,*024 = 1*,*785 · 0*,*024 · 10−5 = 0*,*043 · 10−5 ◦C−1*.*

*Окончательно*

*α* = (1*,*79 ± 0*,*04) · 10−5 ◦C−1*.*

*Найденное графическим методом значение α в пределах точности изме- рений согласуется с этим результатом.*

## *Рабuта 1.1.3*

### *Статистическая обработка результатов* многократных измерений

*Цель работы: применение методов обработки экспериментальных данных при измерении сопротивлений.*

*В работе используются: набор резисторов (2503300 штук), уни- версальный цифровой вольтметр В7-23, работающий в режиме <Из- мерение сопротивлений постоянному току>.*

*Производство резисторов на заводе - сложный технологический* процесс. В результате величина сопротивления может отличаться от указанного на каждом экземпляре номинала. Погрешности могут быть как систематические, так и случайные. Плохая настройка производ- ственных станков и аппаратуры приводит к систематическим погреш- ностям. К случайным погрешностям приводят, например, неоднород- ность используемой проволоки (по толщине и химическому составу), случайные изменения температурного режима, люфты станков.

*Для измерения сопротивлений в данном случае, так как относи-* тельные отклонения от номинала малы, необходимо воспользоваться достаточно точным измерительным прибором. Подходящим прибором является <универсальный цифровой вольтметр В7-23>, применяемый в режиме <измерение сопротивления постоянному току>, который обес- печивает точность до сотых долей процента относительной погрешно- сти. Конкретные величины надо взять из описания непосредственно используемого прибора.

*Таким образом, погрешностью измерений, связанной с измеритель-* ным прибором, можно пренебречь по сравнению с отклонениями от номинала, полученными в процессе изготовления резисторов.

*Основное в данной работе - измерение сопротивлений всех резисто-* ров из набора (250-300 штук). По результатам измерений вычисляется среднее значение (1.15):

(*R*Ь = 1 L *R . (1)*

*i*=0

*N*

*N*

*i*

*При большом числе измеренных сопротивлений получаем характери-* стику данного набора, которая перестает зависеть от числа измерений (числа резисторов).

*Чтобы охарактеризовать случайные погрешности при изготовлении* набора резисторов, необходимо построить гистограмму. Для этого из всех результатов измерений находим наибольший *Rмакс и наименьший* *Rмин. Разность Rмакс Rмин делим на m частей. Полученную величину* называем интервалом изменения сопротивления:

−

∆*R* = *Rмакс* − *Rмин . (2)*

*m*

*Гистограмму строим следующим образом. По оси абсцисс откладываем* сопротивление резистора и отмечаем интервалы изменения сопротив- ления. А по оси ординат над каждым интервалом можно откладывать число результатов измерений ∆*n, которое попадает в данный интер-* вал. Но удобнее это число поделить на количество всех измерений *N*

*(это дает вероятность попадания результата в данный интервал) и на* ширину используемого интервала ∆*R (в итоге имеем плотность веро-* ятности). Таким образом, по оси ординат откладывается величина

∆*n*

*y* = *.*

*N* ∆*R*

*Интересно проследить, как изменяется гистограмма с увеличением* числа разбиений. При этом *m должно оставаться существенно мень-* ше *N.*

*На том же графике нужно отложить по оси абсцисс среднее значе-* ние сопротивления и посмотреть, как располагается гистограмма отно- сительно этой величины.

*Для характеристики разброса случайной величины используется*

*среднеквадратичное отклонение (1.18):*

##### г1� 1 L*N*

*σ* =

*N i*=1

(*Ri* − (*R*Ь)2*. (3)*

*На оси абсцисс гистограммы полезно отметить точки R σ и R* +*σ и* посмотреть, как располагается относительно этих точек гистограмма.

( Ь− ( Ь

*Используя σ, можно построить функцию распределения Гаусса* (1.16):

##### 1

√

*y* = *e*

2*πσ*

− (*R*−(*R*))2

2*σ*2 *. (4)*

*Эту зависимость следует нанести на гистограмму.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с кратким описанием <универсального цифрового вольт-* метра В7-23>, обратив особое внимание на пункт <измерение сопротив- ления постоянному току>.

*2. Подготовьте вольтметр к работе, включив его в сеть и дав ему про-* греться в течение 15-20 минут.

*3. Проведите измерения сопротивлений резисторов из набора N* = 250*-300* штук.

*4. Постройте гистограмму (см. указание в тексте работы) для m* = 10 *и*

*m* = 20*.*

*5. Вычислите R и сравните с номиналом. Отложите эти величины на* оси абсцисс и сравните с положением максимума гистограммы. Отметь- те на оси абсцисс гистограммы значения *R σ и R* + *σ. Сравните* ширину гистограммы с этими значениями.

( Ь

( Ь − ( Ь

*6. Вычислите долю результатов, которая находится в пределах от* (*R*Ь− *σ*

*до* (*R*Ь + *σ и от* (*R*Ь − 2*σ до* (*R*Ь + 2*σ.*

*7. Постройте кривую Гаусса и сравните с гистограммами при различном* числе разбиений *n.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сквайрс Дж. Практическая физика. - М.: Мир, 1971.*

*2. Зайделъ А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. - Л.: Наука, 1974.*

### *Образец отчета о выполнении работы* *1.1.3*

*В работе используются: набор 270 сопротивлений, имеющих номинал*

*560 Ом, универсальный цифровой вольтметр В7-23, работающий в режиме*

*<измерение сопротивлений постоянному току>.*

*Результаты измерения сопротивлений 270 резисторов (в Омах) приводят- ся в табл. 1. Они переписаны в порядке возрастания.*

*По этой таблице строим гистограммы для m* = 20 *и m* = 10*. Для удоб-*

*ства сравнения с нормальным распределением по оси ординат будем откла- дывать не число результатов* ∆*n, попадающих в каждый интервал, а это*

*Т а б л и ц а* *1*

## *РезуJьтаты измеренин сuнрuтинJенин 270 резистuрuн*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *539,7* | *540,7* | *541,5* | *542,3* | *542,8* | *543,4* | *543,9* | *544,3* | *545,0* |
| *545,4* | *545,5* | *545,9* | *546,0* | *546,1* | *546,1* | *546,5* | *546,8* | *546,9* |
| *547,6* | *547,9* | *548,0* | *548,4* | *548,7* | *548,9* | *549,0* | *549,1* | *549,2* |
| *549,3* | *549,3* | *549,3* | *549,4* | *549,6* | *549,7* | *549,7* | *549,9* | *550,0* |
| *550,1* | *550,8* | *551,8* | *552,0* | *552,1* | *552,3* | *552,3* | *552,7* | *553,0* |
| *553,2* | *553,3* | *553,6* | *553,7* | *553,9* | *554,2* | *554,2* | *554,2* | *554,2* |
| *554,3* | *554,3* | *554,5* | *554,7* | *554,8* | *555,0* | *555,1* | *555,1* | *555,1* |
| *555,2* | *555,3* | *555,3* | *555,3* | *555,3* | *555,3* | *555,3* | *555,5* | *555,6* |
| *555,7* | *555,7* | *555,7* | *555,7* | *556,0* | *556,1* | *556,1* | *556,4* | *556,4* |
| *556,4* | *556,5* | *556,5* | *556,6* | *556,6* | *556,7* | *556,8* | *556,8* | *556,9* |
| *557,0* | *557,0* | *557,0* | *557,1* | *557,1* | *557,1* | *557,2* | *557,2* | *557,3* |
| *557,3* | *557,4* | *557,4* | *557,4* | *557,5* | *557,5* | *557,7* | *557,7* | *557,8* |
| *557,8* | *557,9* | *558,0* | *558,0* | *558,0* | *558,1* | *558,1* | *558,4* | *558,4* |
| *558,5* | *558,5* | *558,5* | *558,5* | *558,6* | *558,7* | *558,8* | *558,8* | *558,8* |
| *558,8* | *558,9* | *558,9* | *559,0* | *559,0* | *559,1* | *559,1* | *559,3* | *559,3* |
| *559,4* | *559,4* | *559,4* | *559,6* | *559,7* | *559,7* | *559,7* | *559,7* | *559,8* |
| *559,8* | *559,8* | *559,8* | *559,9* | *560,0* | *560,0* | *560,0* | *560,0* | *560,0* |
| *560,2* | *560,2* | *560,3* | *560,4* | *560,4* | *560,4* | *560,6* | *560,7* | *560,9* |
| *561,0* | *561,1* | *561,1* | *561,1* | *561,4* | *561,5* | *561,5* | *561,6* | *561,9* |
| *562,0* | *562,0* | *562,0* | *562,3* | *562,3* | *562,5* | *562,5* | *562,6* | *562,6* |
| *562,6* | *562,7* | *562,7* | *562,7* | *562,8* | *562,8* | *563,0* | *563,1* | *563,1* |
| *563,2* | *563,6* | *563,6* | *563,6* | *564,0* | *564,2* | *564,3* | *564,4* | *564,5* |
| *564,5* | *564,5* | *564,8* | *565,0* | *565,1* | *565,1* | *565,2* | *565,3* | *565,3* |
| *565,7* | *565,8* | *565,9* | *566,1* | *566,1* | *566,2* | *566,8* | *566,9* | *567,6* |
| *567,8* | *568,0* | *568,1* | *568,3* | *568,7* | *568,9* | *569,1* | *569,7* | *569,8* |
| *570,2* | *570,3* | *570,6* | *570,7* | *571,0* | *571,1* | *571,1* | *571,5* | *572,1* |
| *572,3* | *572,4* | *572,6* | *572,9* | *573,0* | *573,1* | *573,2* | *573,3* | *573,5* |
| *574,0* | *574,0* | *574,8* | *575,1* | *576,0* | *576,3* | *578,1* | *578,8* | *578,8* |
| *579,0* | *579,2* | *579,7* | *579,8* | *580,0* | *580,5* | *580,6* | *581,1* | *581,4* |
| *582,7* | *582,9* | *583,1* | *584,1* | *584,3* | *586,6* | *586,7* | *587,3* | *589,0* |

*Т а б л и ц а* *2*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| ∆*n* | *4* | *4* | *10* | *17* | *8* | *16* | *44* | *45* | *28* | *25* |
| *w* · 1000 | *6* | *6* | *15* | *25* | *12* | *24* | *65* | *67* | *41* | *37* |
| *k* | *11* | *12* | *13* | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20* |
| ∆*n* | *14* | *10* | *11* | *10* | *3* | *7* | *5* | *5* | *3* | *1* |
| *w* · 1000 | *21* | *15* | *16* | *15* | *4* | *10* | *7* | *7* | *4* | *1* |

*Т а б л и ц а* *3*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| ∆*n* | *8* | *27* | *24* | *89* | *53* | *24* | *21* | *10* | *10* | *4* |
| *w* · 1000 | *6* | *20* | *18* | *66* | *39* | *18* | *16* | *7* | *7* | *3* |

*число, деленное на полное число результатов N и величину интервала* ∆*R. В таблицах 2 и 3 в зависимости от номера группы k приведены значения*

∆*n и w* = ∆*n/*(*N* ∆*R*)*. На рис. 1 и 2 представлены гистограммы. Среднее*

*значение сопротивлений находим по формуле (1):*

(*R*) = 1 *R*

*N*

*N*

*i*

*i*=1

= 560*,*7 *Ом.*

*Среднеквадратичное отклонение находим по формуле (3):*

*σ* =

(*Ri* − (*R*))2 ≈ 9 *Ом.*

1 *N*

*N i*=1

*В интервал от* (*R*) − *σ до* (*R*) + *σ попадает 46% результатов, а в интервал от* (*R*) − 2*σ до* (*R*) + 2*σ соответственно - 93%. Нормальное распределение описывается формулой (4):*

1

√

*y* = *e*

2*πσ*

(*R*−(*R*))2

− 2*σ*2 *.*

*Эта функция также изображена на рис. 1 и 2. Видно, что гистограмма соот- ветствует этой зависимости. Теоретическая вероятность попадания измере- ний в интервал от* (*R*) − *σ до* (*R*) + *σ равна 68%, а в интервал от* (*R*) − 2*σ до*

(*R*) + 2*σ соответственно - 95%.*

*Практически мы получаем, что величина сопротивления резистора, на- угад выбранного из данного набора, попадает в интервал* 560 ± 9 *Ом с веро- ятностью 46%, в интервал* 560 ± 18 *Ом - с вероятностью 93%, в интервал* 560 ± 27 *Ом - с вероятностью 99%.*

*Таким образом, величины всех сопротивлений укладываются в 5-про- центный интервал (*(*R*) ± 3*σ).*

*w*

*y*

*σ*2 = 90 *Ом*2

*σ* = 9 *Ом*

(*R*) = 560*,*7 *Ом*

*Rср* − *σ*

*Rср*

*Rср* + *σ*

*0,06*

*0,05*

*0,04*

*0,03*

*0,02*

*0,01*

*0*

*540 550 560 570 580 590 R*

*\_lис. 1. 'истограмма для m* = 20

*w*

*y*

*σ*2 = 90 *Ом*2

*σ* = 9 *Ом*

(*R*) = 560*,*7 *Ом*

*Rср* − *σ*

*Rср*

*Rср* + *σ*

*0,06*

*0,05*

*0,04*

*0,03*

*0,02*

*0,01*

*0*

*540 550 560 570 580 590 R*

*\_lис. 2. 'истограмма для m* = 10

## *Рабuта 1.1..4*

### *Измерение интенсивности радиационного* фона

*Цель работы: применение методов обработки экспериментальных данных для изучения статистических закономерностей при измере- нии интенсивности радиационного фона.*

*В работе используются: счетчик Гейгера3Мюллера (СТС-6), блок питания, компьютер с интерфейсом связи со счетчиком.*

*Случайный разброс результатов измерений, как уже говорилось ра-* нее при обсуждении случайных погрешностей, может быть связан как с погрешностью измерений, так и со случайными изменениями самой измеряемой величины. Поток космических частиц, которые составля- ют значительную часть радиационного фона, изменяется со временем случайным образом. Если изменения происходят около какого-либо значения, то говорят, что величина флуктуирует. В таком случае ха- рактеристиками этой величины в целом являются ее среднее значение и среднеквадратичное отклонение от этого среднего. Для нахождения среднего значения и среднеквадратичного отклонения применяются те же методы, которые используются при расчете средних значений и слу- чайных погрешностей измерений.

*Теuретическан снранка u нрирu,це кuсмических Jучей.l Косми-* ческие лучи разделяют на первичные, которые приходят на орбиту Земли из космоса, и вторичные, которые возникают благодаря взаи- модействию первичных с атмосферой Земли и составляют основную часть космических лучей, доходящих до поверхности Земли.

*Подавляющая часть первичных космических лучей приходит к Зем-* ле из Галактики и лишь небольшая часть и меньших энергий связана с активностью Солнца. О механизме возникновения космических лу- чей в Галактике пока существуют лишь гипотезы. Часть излучения возникает в звездах Галактики так же, как на Солнце во время хромо- сферных вспышек. Более мощное излучение, по-видимому, связано со вспышками сверхновых звезд и образующимися при этом пульсарами. Большую роль в ускорении космических частиц могут играть возни- кающие при вспышках сверхновых звезд плазменные облака, которые двигаются с очень большими скоростями, и галактические магнитные поля.

*1 Не обязательно при первом прочтении*

*Первичные космические лучи - это поток стабильных частиц, име-* ющих большую кинетическую энергию, которая в принятых для из- мерений в этих случаях единицах составляет от 109 *до 10*21 *элек-* трон-вольт или сокращенно эВ (1 *электрон-вольт* = 1*,*6 10−12 *эрг* =

·

·

= 1*,*6 10−19 *Дж). Установлено, что в космическом пространстве поток*

*частиц одинаков по всем направлениям (изотропен).*

*Основной величиной, характеризующей количество частиц в кос-* мических лучах, является интенсивность *I. По определению интенсив-* ность есть число частиц, падающих в единицу времени на единичную площадку, перпендикулярную к направлению наблюдения, отнесенное к единице телесного угла (стерадиану). Единицей измерения при этом является число частиц

*см*2 · *ср* · *с .*

*В случае изотропного распределения направлений космических лу-* чей, что действительно имеет место вне атмосферы Земли, плотность *F потока частиц (из полусферы направлений) равна*

*F* = 2*π*

*π/*2

0

Z

*I* cos *θ* sin *θ dθ* = *πI число частиц ,*

*см*2 · *с*

( )

*концентрация частиц, имеющих абсолютное значение скорости V :*

4*πI*

*n* =

*V*

*число частиц .*

*см*3

( )

*Отметим, что подавляющее число космических частиц вне атмосфе-* ры движется со скоростями, близкими к скорости света, поэтому для оценки концентрации *n вместо V с достаточной точностью можно ис-* пользовать скорость света *c. Отметим также, что вблизи поверхности* Земли интенсивность вторичного космического излучения пропорцио- нальна cos2 *θ, где θ - угол с вертикалью.*

*Плотность потока частиц измеряется количеством частиц, проходя-* щих за 1 секунду через площадку в 1 см2*. На расстоянии порядка 50 км* над поверхностью Земли плотность потока равна 1 частица/(см2 *с).* Большую часть потока здесь составляют частицы с энергией 10 ГэВ. Частицы с энергией меньше 1 ГэВ практически отсутствуют, что, види- мо, связано с влиянием магнитных полей Земли и Солнечной системы. В основном первичные космические лучи состоят из протонов (92%)

·

*и ядер гелия (6,6%), называемых также α-частицами. Обнаружены так-*

*же и более тяжелые ядра (вплоть до никеля), составляющие все вместе*

*около 0,8%. Электронов и позитронов набирается примерно 1%, при-* чем позитронов в десять раз меньше, чем электронов. Число *γ-квантов* с энергиями больше 108 *эВ составляет всего 0,01%.*

*Временны, е изменения интенсивности потока первичных космиче-* ских лучей невелики. Их изменения в основном для частиц с энерги- ей порядка 1 ГэВ связаны с изменением магнитных полей в Солнеч- ной системе, вызываемых 11-летними циклами солнечной активности, 27-дневным периодом вращения Солнца вокруг своей оси, а также хро- мосферными вспышками на Солнце (5-13 вспышек в активный год) и магнитными бурями в магнитосфере Земли.

*Попадая в атмосферу Земли, первичные космические лучи взаимо-* действуют с ядрами атомов атмосферных газов и образуют вторичные космические лучи. Из 100 000 протонов первичных космических лучей до поверхности Земли доходит только один. Но появляются вторичные протоны, которые вместе с мюонами (вначале названными *µ-мезонами)* и нейтронами составляют так называемую жесткую компоненту вто- ричных космических лучей. Жестким называется излучение, которое проходит через свинцовую пластинку толщиной в 10 см.

*Мягкая компонента вторичных космических лучей (ее задерживает* свинцовая пластинка толщиной 10 см) состоит в основном из электро- нов, позитронов и фотонов. Мягкая компонента в атмосфере существу- ет вблизи поверхности Земли лишь благодаря тому, что она генериру- ется жесткой. Плотность потока мягкой компоненты космических лу- чей с увеличением высоты возрастает быстрее, чем плотность потока жесткой. На уровне моря плотность потока (в вертикальном направ- лении) мягкой компоненты составляет примерно половину плотности

*потока жесткой, которая равна 1,7 10*−2 *частиц/(см*2 *с), а на высоте*

· ·

*15 км над Землей плотность потока мягкой компоненты в 4-5 раз вы-*

*ше плотности потока жесткой. Общая плотность потока космических* лучей максимальна приблизительно на высоте 17 км. В целом косми- ческие лучи на уровне моря примерно в 100 раз менее плотны, чем на верхней границе атмосферы Земли, и на две трети состоят из мюонов. Анализ ила на дне океана показал, что в среднем плотность потока космических лучей практически не изменилась за последние 35 тысяч лет.

*Плотность потока вторичных космических лучей вблизи поверхно-* сти Земли сильно зависит от направления. Она максимальна в вер- тикальном направлении и минимальна в горизонтальном. Изменение приближенно пропорционально квадрату косинуса угла отклонения от вертикали, что связано с увеличением пути, проходимого лучами в ат-

*мосфере Земли. Небольшие изменения плотности потока вторичных* космических лучей со временем вызваны изменениями в атмосфере Земли давления, температуры и магнитных полей.

*В настоящее время, хотя уже построены мощные ускорители ча-* стиц, космические лучи остаются единственным источником частиц сверхвысоких энергий. Но приходят такие частицы не часто. Частица с энергией 1019 *эВ пролетает через площадь в один квадратный метр* вблизи земной поверхности один раз в 2 тысячи лет. Конечно, если площадь увеличить, например, до 10 квадратных километров, то это будет происходить один раз в несколько дней. Частицы больши,х энер- гий можно зарегистрировать по создаваемому ими вторичному пото- ку частиц, называемому атмосферными ливнями частиц. Общее число частиц в ливне, зарождающемся на высоте примерно в 20-25 км над Землей, может достигать многих миллионов и покрывать площадь в несколько квадратных километров. Одновременное появление большо- го числа частиц на значительной площади служит подтверждением их общего происхождения и позволяет установить энергию образовавшей их частицы.

*Космические лучи и естественная радиоактивность Земли и возду-*

*ха являются основным источником ионов в нижней части атмосферы* Земли (до высот порядка 60 км). Ионизация в атмосфере с увеличени- ем высоты вначале падает, а выше 1 км начинает возрастать, особенно резко с высоты 3 км. На высоте 5 км число ионов в единице объема в 3-4 раза больше, чем вблизи поверхности Земли, а на высоте 9 км - уже в 30 раз больше.

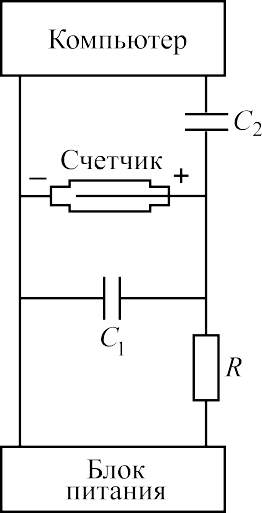
*Устрuйстнu счетчика Гей'ера-МюJJера. Обнаружить космиче-* ские лучи и измерить их интенсивность можно по ионизации, кото- рую они производят. Для этого используется специальный прибор - счетчик Гейгера-Мюллера. Счетчик представляет собой наполненный газом сосуд с двумя электродами. Существует несколько типов таких счетчиков. Используемый в данной работе (СТС-6) представляет со- бой тонкостенный металлический цилиндр, который является одним из электродов (катодом). Другим электродом (анодом) является тон- кая нить, натянутая вдоль оси цилиндра. Чтобы счетчик работал в режиме счета частиц, на электроды необходимо подать напряжение

*400 В. Частицы космических лучей ионизируют газ, которым наполнен*

*счетчик, а также выбивают электроны из его стенок. Образовавшиеся* электроны, ускоряясь в сильном электрическом поле между электрода- ми счетчика, соударяются с молекулами газа и выбивают из них новые вторичные электроны. Эти электроны ускоряются электрическим по- лем и затем ионизируют молекулы газа. В результате образуется целая

*лавина электронов, и через счетчик резко увеличивается ток. На рис. 1* приведена схема включения счетчика.

*Постоянное напряжение подается на счетчик от блока питания че-* рез сопротивление *R. В исходном состоянии электроды СТС-6 и кон-* денсатор *C*1 *заряжены до напряжения 400 В, так как сопротивление* резистора *R много меньше сопротивлений утечки СТС-6 и конденса-* тора *C*1*. Разделительный конденсатор C*2 *не пропускает постоянное* напряжение источника питания в интерфейсные схемы компьютера.

*При возникновении тока через счетчик за-* ряд на СТС-6 и конденсаторе *C*1 *обеспечи-* вает развитие электронной лавины на корот- кое время. В процессе разряда энергия посту- пает от заряженного конденсатора *C*1*, подсо-* единенного параллельно счетчику. Разряд в счетчике прекратится, когда напряжение на счетчике уменьшится до значения, при кото- ром разность потенциалов внутри счетчика на длине свободного пробега электрона не превы- шает потенциала ионизации. За время порядка нескольких *RC*1 *схема приходит в исходное со-*

*стояние. При этом через конденсатор C*2 *в элек-*

*тронную схему интерфейса компьютера будет*

*передан короткий импульс.*

*Емкость конденсатора C*1 *не должна быть* ни слишком малой, ни слишком большой. За-

*пасенной в конденсаторе энергии должно хва-* тить на создание лавинного процесса, но вме- сте с тем время зарядки конденсатора от блока

*\_lис. 1. Cхема включения счетчика*

*питания (τ RC*1*), называемое мертвым временем счетчика, не долж-*

∼

*но быть слишком большим, так как в течение этого времени счетчик*

*не может регистрировать частицы (обычно мертвое время составля-* ет несколько микросекунд). В нашей установке этим условиям вполне удовлетворяет емкость самого счетчика, и конденсатор *C*1 *отсутствует.* Сопротивление резистора *R также не должно быть ни слишком* большим (это увеличивает мертвое время счетчика), ни слишком ма- лым, чтобы конденсатор за время разряда не успевал существенно за-

*рядиться и лавина гасла. Обычно R* ∼ 1 *МОм.*

*Число зарегистрированных частиц зависит от времени измерения,* размеров счетчика, состава газа и давления в нем, а также от матери- ала, из которого сделаны стенки счетчика. Значительную часть реги- стрируемых частиц составляет естественный радиоактивный фон.

*Вариации потока частиц, которые существенны при измерениях в* данной работе, связаны с кратковременными вариациями условий его возникновения и распространения в атмосфере Земли. Как уже говори- лось, в данной работе измеряется величина (плотность потока частиц), которая меняется со временем случайным образом. Методы обработки результатов те же, что и для расчета случайных погрешностей. Что ка- сается погрешностей измерений потока частиц с помощью счетчиков Гейгера-Мюллера, то оценки показывают, что они малы по сравнению с изменениями самого потока или, как говорят, с флуктуациями по- тока. Погрешности измерений определяются в основном временем, в течение которого восстанавливаются нормальные условия в счетчике после прохождения каждой частицы и срабатывания счетчика. Это время называется временем разрешения. Размеры счетчика должны быть такими, чтобы время между попаданиями частиц в счетчик бы- ло больше времени разрешения.

*Онисание экснеримента. Если случайные события (регистрация ча-* стиц) однородны во времени и каждое последующее событие не зависит от того, когда и как случилось предыдущее событие, то такой процесс называется пуассоновским, а результаты - количество отсчётов в од- ном опыте - подчиняются так называемому распределению Пуассона (см. Приложение). При больших числах отсчёт это распределение стре- мится к нормальному.

*В теории вероятностей доказывается, что в таком процессе средне-*

*квадратичная ошибка числа отсчетов, измеренного за некоторый ин-* тервал времени, равна квадратному корню из среднего числа отсчетов

*n*0 *за тот же интервал: σ* = √*n*0 *(см. формулу (10) Приложения). Одна-*

*ко истинное среднее значение измеряемой величины неизвестно (ина-*

*че для его определения не пришлось бы ставить опыты). Поэтому в* формулу для определения стандартной ошибки отдельного измерения приходится подставлять не истинное среднее значение *n*0*, а измеренное* значение *n: σ* = √*n. (1)*

*Формула (1) показывает, что, как правило (с вероятностью 68%), изме-* ренное число частиц *n отличается от искомого среднего не более чем* на *n. Результат измерений записывается так:*

√

*n*0 = *n* ± √*n. (2)*

*Обратимся теперь к следующему важному вопросу. Пусть мы про-* вели серию из *N измерений, в результате которых получены числа* частиц *n*1*, n*2*, ..., nN . Эти результаты мы до сих пор использовали для*

*того, чтобы определить, как сильно значения, полученные в отдельных* измерениях, отличаются от истинного значения. Как уже отмечалось, этот вопрос важен главным образом для выяснения того, насколько достоверен результат, полученный в одном измерении. Но если было проведено несколько измерений, их результаты могут быть использо- ваны и с другой целью: они позволяют определить среднее значение измеряемой величины лучше, чем это можно сделать, когда произве- дено всего одно измерение. При *N измерениях среднее значение числа* сосчитанных за одно измерение частиц равно, очевидно,

*n*¯ = 1 L *n , (3)*

*i*=1

*N*

*N*

*i*

*а стандартную ошибку отдельного измерения можно оценить по фор-* муле (1.18), т. е., положив в формуле (1.17) *n*0 = *n*¯*:*

##### г1� 1 L*N*

*σотд* =

*N i*=1

(*ni* − *n*¯)2*. (4)*

*В соответствии с формулой (1) следует ожидать, что эта ошибка будет* близка к √*ni, т. е. σотд* ≈ *σi* = √*ni, где в качестве ni можно подста-*

*вить любое из измеренных значений n. Поскольку ni различны, мы*

*будем, таким образом, получать для σотд различные оценки. Одни из*

*них будут лучше, а другие - хуже совпадать с более надежной оцен-* кой *σотд - со значением, определенным по всем измерениям, т. е. по* формуле (4). Это вполне естественно. Обрабатывая результаты измере- ний, мы всегда получаем приближенные значения измеряемой величи-

*ны и приближенные значения погрешностей, которые, в зависимости* от случая, могут лучше или хуже совпадать с истинными. Ближе все- го к значе√*нию σотд, определенному по формуле (4), лежит, конечно,*

*величина*

*n*¯*, т. е.*

*σотд* ≈

√*n*¯*. (5)*

*Величина n*¯ *из формулы (3), полученная путем усреднения резуль-* татов по серии из *N опытов, конечно, тоже не вполне точно совпадает* с истинным средним значением *n*0 *и сама является случайной величи-* ной. Теория вероятностей показывает, что стандартная ошибка откло- нения *n*¯ *от n*0 *может быть определена по формуле (1.20):*

*σn*¯ =

1. г1�L*N*

(*ni* − *n*¯) = √ *. (6)*

2 *σотд*

*N i*=1 *N*

*При написании второй части равенства мы использовали формулу (4).* Обычно наибольший интерес представляет не абсолютная, а отно- сительная точность измерений. Для рассмотренной серии из *N изме-* рений по 10 с относителъная ошибка отдельного измерения (т. е. ожи-

*даемое отличие любого из ni от n*0*)*

*σотд*  1

*ε* = ≈ *.*

*отд ni* √*ni*

*Аналогичным образом определяется относительная ошибка в опреде-* лении среднего по всем измерениям значения *n*¯*:*

*σn*¯ *σотд* 1

*εn*¯ = *n*¯ = *n*¯√*N* ≈ √*n*¯*N . (7)*

*При написании последнего из равенств (7) значение σотд было подстав-* лено из формулы (5).

*Таким образом, относительная точность измерения n*¯ *определяется* только полны.м числом отсчетов *n*¯*N и не зависит от интервалов разби-* ения серии (по 10, 40 или 100 с). Этого, конечно, и следовало ожидать,

*так как все измерения вместе составляют одно более продолжительное* измерение, в котором всего зарегистрировано *ni* = *n*¯*N отсчетов. Как* мы видим, относительная точность измерения постепенно улучшается с увеличением числа отсчетов (а значит, и с увеличением полного вре- мени измерений).

�

*С помощью формулы (7) найдем, что для измерения интенсивности* космического излучения с точностью до 1% необходимо получить, по крайней мере, 1002*=10 000 отсчетов, для точности 3% достаточно 1000* отсчетов, при точности 10% нужно всего 100 отсчетов и т. д. При этом точность измерения не зависит от того, получены ли все 1000 или 10 000 отсчетов в одном или нескольких независимых опытах.

*В работе для организации процесса измерения плотности космиче-* ских лучей и процесса обработки экспериментальных данных использу- ется специально разработанная компьютерная программа. Используя эту программу, можно получить сведения об экспериментальной уста- новке, провести численный эксперимент, в котором имитируется реаль- ный эксперимент. При численном эксперименте данные получаются с помощью специальной программы (генератора случайных чисел). При проведении реального эксперимента программа позволяет посмотреть, как во время эксперимента меняется сама исследуемая величина, ее среднее значение, стандартное отклонение (погрешность), гистограм- ма, убедиться в применимости теоретических формул, приведенных в

*разделе об измерениях и их погрешностях. Анализируя результаты,* можно выбрать подходящие длительность интервала измерений и чис- ло отсчетов. В программе имеются определения основных понятий и формулы, используемые при обработке результатов экспериментов.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Перед тем как приступить к работе, прочтите разделы, посвященные* измерениям.

*2. Ознакомьтесь с устройством установки.*

*3. Включите питание компьютера и установки. После загрузки компью-* тера запустится программа STAT и таким образом начнется проведение основного эксперимента. Познакомьтесь с описанием программы STAT, имеющимся в лаборатории.

*4. Проведите демонстрационный эксперимент, при котором данные для* обработки получаются от генератора случайных чисел. Выясните, как меняются в зависимости от числа измерений:

*1) измеряемая величина,*

*2) ее среднее значение,*

*3) погрешность отдельного измерения,*

*4) погрешность среднего значения.*

*5. По окончании основного эксперимента перепишите в рабочую тетрадь* все данные основного эксперимента, выдаваемые компьютером.

*6. По результатам, записанным в рабочую тетрадь, постройте гистограм-* му *wn* = *f* (*n*) *распределения числа отсчетов за 10 с. Для этого по* оси абсцисс отложите последовательные целые числа *n, а по оси ор-* динат - долю случаев, когда число отсчетов счетчика равнялось *n.* Доля случаев *wn, характеризующая вероятность получить n отсчетов,* определяется по очевидной формуле:

*число случаев с отсчетом n* wn = *полное число измерений* (*N* ) *.*

*7. Разбейте результаты измерений для τ* = 20 *с в порядке их получения на* группы по два и с их помощью постройте гистограмму распределения числа отсчетов за 40 с. Гистограммы распределений числа отсчетов за 10 и 40 с для наглядности следует строить на одном графике. При этом для второго распределения цена деления по оси абсцисс должна быть подобрана таким образом, чтобы положения средних значений

*n*¯ *совпадали. Как изменяется гистограмма при увеличении времени*

*измерения? Чем определяется ширина пика гистограммы?*

*8. Определите среднее число частиц за 10 и 40 секунд и соответствующие* среднеквадратичные отклонения для отдельного и среднего значений.

*Убедитесь, что стандартное отк*√*лонение отдельного измерения связано*

*со средним числом частиц σ* = *n*¯*.*

*9. Определите процент случаев, когда отклонение от среднего не превы-* шает *σ, 2σ. Сравните результаты с теоретическими оценками.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.: Наука, 1983. С. 40352.*

*2. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 3 / Под ред. Ю.М. Ципеню- ка. - М.: Издательство МФТИ, 1998. С. 1593166, 3673372.*

*3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. V. Ч. 2. С. 3543370.*

### *Образец отчета о выполнении работы* *1.1.4*

*В работе используются: счетчик Гейгера3Мюллера (СТС-6), блок пита- ния, компьютер.*

*1. Включаем компьютер. (Начинается измерение для основного экспери- мента.)*

*2. В результате демонстрационного эксперимента убеждаемся, что при*

*увеличении числа измерений:*

*1) измеряемая величина флуктуирует,*

*2) флуктуации среднего значения измеряемой величины уменьшаются, и среднее значение выходит на постоянную величину,*

*3) флуктуации величины погрешности отдельного измерения уменьша- ются, и погрешность отдельного измерения (погрешность метода) выходит на постоянную величину,*

*4) флуктуации величины погрешности среднего значения уменьшаются, а сама величина убывает.*

*3. Переходим к основному эксперименту: измерение плотности потока*

*космического излучения за 10 секунд (результаты набирались с момента включения компьютера). На компьютере проведем обработку, аналогичную сделанной в демонстрационном эксперименте. Результаты приведены в таб- лицах 1 и 2.*

*4. Разбиваем результаты измерений из таблицы 1 в порядке их получения на группы по 2, что соответствует проведению N*2 = 100 *измерений числа частиц за интервал времени, равный 40 с. Результаты сведем в таблицу 3.*

*5. Представим результаты последнего распределения в виде, удобном для построения гистограммы (табл. 4). Гистограммы распределений среднего числа отсчетов за 10 и 40 с строим на одном графике (рис. 2). При этом для второго распределения цену деления по оси абсцисс увеличиваем в* *4*

*раза, чтобы положения максимумов распределений совпадали.*

*6. Используя формулу (3), определим среднее число срабатываний счет- чика за 10 с:*

*N*1

400

*n*¯1 = 1 *n*

*N*1

*i*

*i*=1

= 2896 = 7*,*24*.*

*Т а б л и ц а* *1*

*Число срабатываний счетчика за 20 с*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№ опыта* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *0* | *20* | *16* | *20* | *16* | *16* | *15* | *13* | *16* | *13* | *14* |
| *10* | *17* | *22* | *14* | *12* | *15* | *17* | *20* | *16* | *16* | *17* |
| *20* | *16* | *15* | *28* | *15* | *19* | *5* | *14* | *17* | *14* | *15* |
| *30* | *11* | *6* | *14* | *11* | *16* | *12* | *18* | *14* | *14* | *25* |
| *40* | *10* | *21* | *18* | *14* | *13* | *20* | *18* | *15* | *17* | *11* |
| *50* | *10* | *7* | *6* | *21* | *23* | *19* | *10* | *13* | *14* | *15* |
| *60* | *10* | *12* | *13* | *9* | *18* | *19* | *17* | *11* | *9* | *16* |
| *70* | *16* | *15* | *12* | *16* | *12* | *20* | *6* | *11* | *13* | *19* |
| *80* | *22* | *17* | *19* | *17* | *10* | *13* | *10* | *20* | *16* | *10* |
| *90* | *12* | *10* | *19* | *16* | *14* | *15* | *5* | *14* | *13* | *13* |
| *100* | *12* | *14* | *12* | *14* | *13* | *13* | *17* | *7* | *18* | *15* |
| *110* | *13* | *13* | *22* | *12* | *15* | *14* | *10* | *16* | *15* | *10* |
| *120* | *17* | *19* | *27* | *13* | *16* | *16* | *13* | *15* | *15* | *13* |
| *130* | *6* | *18* | *8* | *14* | *16* | *17* | *13* | *15* | *19* | *16* |
| *140* | *17* | *13* | *15* | *19* | *16* | *14* | *20* | *18* | *16* | *12* |
| *150* | *16* | *12* | *14* | *12* | *11* | *8* | *12* | *10* | *13* | *20* |
| *160* | *11* | *10* | *10* | *10* | *20* | *16* | *15* | *15* | *11* | *10* |
| *170* | *13* | *12* | *15* | *14* | *15* | *13* | *12* | *17* | *15* | *11* |
| *180* | *11* | *13* | *15* | *14* | *11* | *10* | *16* | *14* | *14* | *22* |
| *190* | *10* | *16* | *20* | *18* | *11* | *11* | *10* | *22* | *15* | *11* |

*Примечание: Таблица составлена так, что, например, результат 123-го опыта лежит на пересечении строки, обозначенной 120, и столбца 3.*

*7. Найдем среднеквадратичную ошибку отдельного измерения по форму- ле (4):*

*σ*1 =

1

*N*1

(*ni* − *n*¯1 )2 =

12934

≈ 2*,*7*.*

*N*1 *i*=1

400

*8. Убедимся в справедливости формулы (5):*

*σ*1 ≈ √*n*¯1 ; 2*,*7 ≈ ✓7*,*24 = 2*,*69*.*

*9. Определим долю случаев, когда отклонения от среднего значения не превышают σ*1*,* 2*σ*1 *, и сравним с теоретическими оценками (табл. 5).*

*10. Используя формулу (3), определим среднее число импульсов счетчика*

*Т а б л и ц а* *2*

*Данные для построения гистограммы распределения числа срабатываний счетчика за 10 с*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Число импульсов ni* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| *Число случаев* | *0* | *3* | *9* | *15* | *30* | *59* |
| *Доля случаев wn* | *0* | *0,007* | *0,023* | *0,037* | *0,075* | *0,147* |
| *Число импульсов ni* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* |
| *Число случаев* | *49* | *53* | *62* | *45* | *28* | *20* |
| *Доля случаев wn* | *0,123* | *0,132* | *0,155* | *0,113* | *0,070* | *0,050* |
| *Число импульсов ni* | *12* | *13* | *14* | *15* | *16* | *17* |
| *Число случаев* | *14* | *7* | *2* | *3* | *0* | *1* |
| *Доля случаев wn* | *0,035* | *0,017* | *0,005* | *0,007* | *0* | *0,003* |

*Т а б л и ц а* *3*

*Число срабатываний счетчика за 40 с*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№ опыта* | *1* | *2* | *3* | *4* |  | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
| *0* | *36* | *36* | *31* | *29* | *27* | *39* | *26* | *32* | *36* | *33* |
| *10* | *31* | *43* | *24* | *31* | *29* | *17* | *2* | *28* | *32* | *39* |
| *20* | *31* | *32* | *33* | *33* | *28* | *17* | *27* | *42* | *23* | *29* |
| *30* | *22* | *22* | *37* | *28* | *2* | *31* | *28* | *32* | *17* | *32* |
| *40* | *39* | *36* | *23* | *30* | *26* | *22* | *3* | *29* | *19* | *26* |
| *0* | *26* | *26* | *26* | *24* | *33* | *26* | *34* | *29* | *26* | *2* |
| *60* | *36* | *40* | *32* | *28* | *28* | *24* | *22* | *33* | *28* | *3* |
| *70* | *30* | *34* | *30* | *38* | *28* | *28* | *26* | *19* | *22* | *33* |
| *80* | *21* | *20* | *36* | *30* | *21* | *2* | *29* | *28* | *29* | *26* |
| *90* | *24* | *29* | *21* | *30* | *36* | *26* | *38* | *22* | *32* | *26* |

*за 40 с:*

*n*¯2 = 1 *n*

*i*=1

= 2896 ≈ 29*,*0*.*

*11. Найдем среднеквадратичную ошибку отдельного измерения по фор- муле (4):*

*N*2

*N*2

*i*

100

*σ*2 =

1

*N*2

(*ni* − *n*¯2 )2 =

13210

≈ 5*,*7*.*

*N*2 *i*=1

100

*12. Убедимся в справедливости формулы (5):*

*σ*2 ≈ √*n*¯2 ; 5*,*7 ≈ ✓29*,*0 = 5*,*4*.*

*w*

*0,16*

*0,14*

*0,12*

*0,1*

*0,08*

*0,06*

*0,04*

*0,02*

*0*

*0 5 10 15 20 n*

*0 10 20 30 40 50 60 70 80*

*\_lис. 2. 'истограммы для τ* = 10 *с и τ* = 40 *с*

*Т а б л и ц а* *4*

*Данные для построения гистограммы распределения числа срабатываний счетчика за 40 с*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Число импульсов n*1 | *17* | *18* | *19* | *20* | *21* | *22* | *23* | *24* | *25* |
| *Число случаев* | *3* | *0* | *2* | *1* | *3* | *6* | *2* | *4* | *4* |
| *Доля случаев wn* | *0,03* | *0* | *0,02* | *0,01* | *0,03* | *0,06* | *0,02* | *0,04* | *0,04* |
| *Число импульсов n*1 | *26* | *27* | *28* | *29* | *30* | *31* | *32* | *33* | *34* |
| *Число случаев* | *12* | *2* | *10* | *8* | *5* | *5* | *7* | *6* | *2* |
| *Доля случаев wn* | *0,12* | *0,02* | *0,01* | *0,08* | *0,05* | *0,05* | *0,07* | *0,06* | *0,02* |
| *Число импульсов n*1 | *35* | *36* | *37* | *38* | *39* | *40* | *41* | *42* | *43* |
| *Число случаев* | *2* | *7* | *1* | *2* | *3* | *1* | *0* | *1* | *1* |
| *Доля случаев wn* | *0,02* | *0,07* | *0,01* | *0,02* | *0,03* | *0,01* | *0* | *0,01* | *0,01* |

*Т а б л и ц а* *5*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Ошибка* | *Число случаев* | *Доля случаев, %* | *Теоретическая оценка* |
| ±*σ*1 = ±2*,*7  ±2*σ*1 = ±5*,*4 | *268*  *384* | *67*  *96* | *68*  *95* |

*13. Сравним среднеквадратичные ошибки отдельных измерений для двух распределений: n*¯1 = 7*,*4*, σ*1 = 2*,*7 *и n*¯2 = 29*, σ*2 = 5*,*7*. Легко видеть, что хотя абсолютное значение σ во втором распределении больше, чем в первом (*5*,*7 *>* 2*,*7*), относительная полуширина второго распределения меньше:*

*σ*1 2*,*7 *σ*2 5*,*7

*n*¯1 · 100% = 7*,*24 · 100% ≈ 37%*, n*¯2 · 100% = 29 · 100% ≈ 20%*.*

*Это следует также из рис. 2.*

*14. Определим стандартную ошибку величины n*¯1 *и относительную ошиб- ку нахождения n*¯1 *для N* = 400 *измерений по 10 с. По формуле (6)*

*σ*1 *σn*¯1 = √*N*

1

2*,*7

= √400 ≈ 0*,*13*.*

*Найдем относительную ошибку по первому равенству (7):*

*εn*¯

1

= *σn*¯1 · 100% = 0*,*13 · 100% ≈ 1*,*8%;

*по последнему равенству (7):*

*n*¯1

7*,*24

100%

*εn*¯1 = √*n*¯ *N*

1

1

100%

= √7*,*24 · 400 ≈ 1*,*9%*.*

*Окончательный результат:*

*nt*=10*с* = *n*¯1 ± *σn*¯1 = 7*,*24 ± 0*,*13*.*

*15. Определим стандартную ошибку для величины n*¯2 *и относительную ошибку нахождения n*¯2 *для N*2 = 100 *измерений по 40 с. По формуле (6)*

*σ*2 *σn*¯2 = √*N*

2

5*,*7

= √100 = 0*,*57*.*

*Относительная ошибка по первому равенству (7):*

*εn*¯

2

= *σn*¯2 · 100% = 0*,*57 · 100% ≈ 2*,*0%;

*по второму равенству (7):*

*n*¯2

29

100%

*εn*¯2 = √*n*¯ *N*

2

2

100%

= √29 · 100 ≈ 1*,*9% = *εn*¯1 *.*

*Окончательный результат:*

*nt*=40*с* = *n*¯2 ± *σn*¯2 = 29*,*0 ± 0*,*6*.*

### *Приложение*

*Распределение Пуассона. В физике часто приходится встречаться с из- мерениями, результаты которых представляются в виде целых чисел. Через счетчик Гейгера за время измерения проходит целое - и обычно не очень большое - число частиц. Делящееся ядро распадается на целое число ча- стей. Статистические закономерности, которые имеют место в этом случае, обладают некоторыми особенностями.*

*Рассмотрим счетчик, регистрирующий космические частицы. В то время как число отсчетов счетчика за любой промежуток времени является целым числом, плотность ν космического излучения (т. е. отнесенное к единице площади число отсчетов счетчика в секунду, усредненное за очень большой отрезок времени), вообще говоря, целым числом не выражается.*

*Найдем вероятность того, что при плотности ν счетчик за время изме- рения сработает n раз. Будем для простоты считать, что счетчик обладает единичной площадью, окончательные формулы от этого предположения не*

*зависят.*

*Поскольку мы приступаем к вычислению вероятностей, следует предста- вить себе очень большое число совершенно одинаковых одновременно ра- ботающих счетчиков. Некоторая часть их сработает ровно n раз. Доля, со- ставляемая этими счетчиками, по отношению к полному числу счетчиков и равна вероятности того, что через счетчик за время измерения пройдет n частиц.*

*Обозначим полное число счетчиков буквой N. Через них в секунду в среднем проходит Nν частиц, а за небольшое время dt пройдет Nνdt частиц. Если dt достаточно мало, то ни через один из счетчиков за это время не прой- дет двух частиц, и наши счетчики можно разбить на два класса: те, через которые за dt прошла частица, и те, через которые не прошла. Последние со- ставляют, конечно, огромное большинство. Число счетчиков, через которые прошла частица, равно, очевидно, числу сосчитанных частиц, т. е. приблизи- тельно Nνdt, а их доля по отношению к полному числу счетчиков составляет*

*Nνdt/N* = *νdt.*

*Вероятность того, что за время dt через счетчик пройдет частица, равна, следовательно, νdt. Это утверждение справедливо только в том случае, если dt очень мало.*

*Вычислим теперь вероятность P*0 (*t*) *того, что за время t через счетчик не пройдет ни одной частицы. По определению число таких счетчиков в момент*

*t составляет NP*0 (*t*)*, а в момент t* + *dt равно NP*0 (*t* + *dt*)*. Это число меньше, чем NP*0 (*t*)*, потому что за время dt их число убавится на NP*0 (*t*)*νdt. Поэтому*

*NP*0 (*t* + *dt*) = *NP*0 (*t*) − *NP*0 (*t*)*νdt,*

*или*

*P*0(*t* + *dt*) − *P*0 (*t*) = −*P*0(*t*)*νdt.*

*Разделив это равенство на dt и переходя к пределу, получим*

*dP*0 = *νP*0*.*

−

*dt*

*Интегрируя, найдем*

*P*0(*t*) = *e*−*νt. (8)*

*При интегрировании было принято во внимание, что в начальный момент времени вероятность найти счетчик, не сработавший ни разу, равна, конечно, единице.*

*Вычислим теперь Pn*(*t* + *dt*) *- вероятность того, что за время t* + *dt че- рез счетчик пройдет ровно n частиц. Эти счетчики делятся на две группы. К первой принадлежат те, через которые все n частиц прошли за время t, а за время dt не прошло ни одной. Ко второй группе принадлежат счетчи- ки, через которые за время t прошла n* − 1 *частица, а последняя частица прошла за время dt. Число первых счетчиков равно NPn*(*t*)(1 − *νdt*)*, а чис- ло вторых составляет NPn*−1 (*t*)*νdt. (Каждое из этих выражений состоит из двух сомножителей. Первый из них определяет вероятность нужного чис-*

*ла срабатываний за время t, а второй - вероятность несрабатывания или срабатывания за время dt.) Имеем, следовательно:*

*NPn*(*t* + *dt*) = *NPn*(*t*)(1 − *νdt*) + *NPn*−1 (*t*)*νdt.*

*Перенесем NPn*(*t*)(1 − *νdt*) *в левую часть равенства и разделим его на Ndt:*

*dPn* + *νPn* = *νPn*−1*.*

*dt*

*Последовательно применяя полученную рекуррентную формулу к n* = 1*,*

*n* = 2 *и т. д., с помощью (8) найдем*

*Pn* =

(*νt*)*n*

*e*

*n*!

−*νt.*

*Заметим теперь, что νt, которое мы обозначим через n*0 *, равно среднему числу частиц, проходящих через счетчик за время t. Наша формула примет вид*

*n*

*Pn* =

*n*

0 *e*−*n*0 *. (9)*

*n*!

*Эта формула является окончательной и носит название закона распреде-*

*лени.я Пуассона. Она определяет вероятность того, что при среднем числе срабатываний n*0 *(это число, вообще говоря, не является целым) произойдет именно n срабатываний (n - целое число).*

*Закон распределения Пуассона записан в такой форме, что из всех ха- рактеристик работы счетчика осталась только одна - его среднее число срабатываний за время измерения. Ни само время измерения, ни тем более площадь счетчика, которую мы вначале для простоты положили равной еди- нице, в формулу не входят. Равным образом в формуле никак не отражено то обстоятельство, что мы рассматривали счетчик Гейгера, регистрирующий космические лучи. С тем же успехом эта формула применима к числу соеди- нений на телефонной станции или к любой другой задаче, где число случаев является целым, а их появление в любой момент времени не зависит от числа случаев, произошедших ранее (независимые события).*

*Рассмотрим некоторые свойства формулы (9). Вычислим прежде всего вероятность найти какое угодно значение n:*

∞ ∞ *n* ∞ *n*

*P* (*n* ) = *n*0 *e*−*n*0 = *e*−*n*0 *n*0 = *e*−*n*0 *en*0 = 1*.*

*n*=0

*n*=0

*n*=0

*n*

0

*n*!

*n*!

*Этот результат является очевидным, потому что хоть какое-нибудь значение n, конечно, всегда будет найдено на опыте, так что мы вычисляли вероят- ность достоверного события.*

*Вычислим среднее значение n:*

(*n*) =

*nP* (*n* ) =

*n*

*n* 0 *e* 0 = *e* 0 *n*

*n* −*n* −*n*

∞

*nn*−1

=

0

*n* 0

∞

∞

*n*=0

*n*=1 *n*!

0

*n*=1

∞

(*n* − 1)!

*n*

= *n*0 *e*−*n*0 *n*0 = *n*0 *e*−*n*0 *en*0 = *n*0 *.*

*n*=0 *n*!

*Полученный результат тоже можно было предсказать заранее, поскольку мы исходили из того, что среднее значение n равно n*0 *.*

*Найдем теперь среднеквадратичное отклонение величины n. Для этого сначала вычислим дисперсию n (среднее значение квадрата отклонения):*

=

*n*

2*nn*

+ *n*0

=

*n*

*n*

+ *n*0 =

*n*

*n*0*.*

(*n* − *n*0)2

2 − 0 2

2 − 2 (*n*) 0 2

2 − 2

*Для вычисления* *n*2 *удобно сначала найти* (*n*(*n* − 1))*, а затем воспользо-*

*ваться тем, что* (*n*(*n* − 1)) = *n*2 − (*n*) = *n*2 − *n*0*:*

∞ ∞ *n*

(*n*(*n* − 1)) = *n*(*n* − 1)*P* (*n* ) = *n*(*n* − 1) *n*0 *e*−*n*0 =

*n*=0

*n* 0

∞ *n*−2

0

−*n*0

*n*=2 *n*!

∞ *n*

= *e*−*n*0

2 *n*

*n*0

*n*=2 (*n* − 2)!

2 *n*0

= *n*0*e*

−*n*0 *n*0

*n*=0 *n*!

2

= *n*0*e e*

2

= *n*0*.*

*Отсюда:* *n*2 = *n*2 + *n*0 *и*

0

*σ*2 ≡ (*n* − *n*0 )2

=

2 − 2

2 2

*n*0 = *n .*

0 − 0

*Имеем, следовательно:*

*n*

*n*0 = (*n*0 + *n* )

*σ* ≡ ✓((*n* − *n*0 )2) = √*n*0 *. (10)*

*Распределение Гаусса. При устремлении параметра n*0 *к бесконечности распределение Пуассона принимает вид распределения Гаусса. Подобные предельные соотношения существуют и для многих других законов распреде- ления. Это объясняется центральной предельной теоремой, утверждающей, что распределение суммы большого количества независимых случайных ве- личин является распределением Гаусса. Например, количество частиц, по- падающих в счетчик за n секунд (случайная величина, имеющая распре-*

*деление Пуассона), можно рассматривать как сумму n количеств частиц,*

*прилетевших за 1 секунду.*

*Рассмотрим распределение Пуассона при больших n*0 *и n. Дискретность распределения по n в этом случае теряет свое значение, так как n меняется практически непрерывно. Будем характеризовать отличие n от n*0 *с помо- щью ε, определенного соотношением*

*n* = *n*0 (1 + *ε*) *или ε* = *n* − *n*0 *.*

*n*0

*Используя формулу Стирлинга*

ln *n*! = ln √2*πn* + *n* ln *n* − *n*

*и выражение (9), найдем*

ln *Pn* = *n* ln *n*0 − *n*0 − ln √2*πn* − *n* ln *n* + *n* =

√

*откуда*

*n*

= *n* ln *n*0 + (*n* − *n*0) − ln

√2*πn* ≈ − ln

2*πn*0 −

*n*0 *ε*2

*,*

2

1

√

*Pn* = *e*

2*πn*0

(*n*−*n*0)2

2*n*0 *. (11)*

−

*Вероятность Pn может быть обобщена на непрерывные величины. Чтобы это сделать, заметим, что n* − *n*0 *равно отклонению найденной на опыте величины n от среднего значения n*0 *. Обозначим это отклонение через x:*

*x* = *n* − *n*0 *.*

*Заменим n*0 *стандартным отклонением σ с помощью (10). Наконец, заме- тим, что Pn можно интерпретировать как вероятность того, что найденное на опыте значение n лежит в интервале между n* − 1*/*2 *и n* + 1*/*2*. Этому интервалу соответствует* ∆*x* = 1*. Произведя указанные замены и перейдя от обозначения Pn к обозначению P* (*x*)*, получим*

1

√

*P* (*x*) = *e*

2*πσ*

*x*2

− 2*σ*2 *. (12)*

*P* (*x*) *определяет вероятность того, что величина x попадает в единичный интервал* ∆*x, окружающий точку x. Выбирая вместо единичного бесконечно малый интервал dx, найдем*

1

√

*dP* = *ρ*(*x*)*dx* = *e*

2*πσ*

*x*2

− 2*σ*2 *dx. (13)*

*Формула (13) определяет вероятность того, что отклонение от среднего зна- чения будет заключено между x* − *dx/*2 *и x* + *dx/*2*. Величина ρ*(*x*) *называет- ся плотностью вероятности. Для случайной величины, имеющей некоторое ненулевое среднее значение µ, плотность (13) принимает вид*

1

√

*ρ*(*x*) = *e*

2*πσ*

(*x*−*µ*)2

− 2*σ*2 *. (14)*

*Распределение вида (14) носит название распределения Гаусса.*

*С помощью (13) нетрудно найти вероятность того, что отклонение от среднего будет лежать между x*1 *и x*2*, где x*1 *и x*2 *- любые числа. Как нетрудно понять,*

*P* (*x*1 � *x* � *x*2) =

*x*Z2

*x*1

1

√2*πσ*

*x*2

*e*− 2*σ*2 *dx. (15)*

*Интеграл (15) в элементарных функциях не выражается. Он может быть вычислен с помощью таблиц интеграла вероятности* erf(*x*)*:*

2

*Нетрудно показать, что*

2

erf(*x*) = √*π*

*e*−*t*

0

Z*x*

*dt. (16)*

1 2 1 r

*P* (*x*

� *x* � *x* ) =

2

erf

√2*σ*

− erf

√2*σ*

*. (17)*

( *x*2 )

( *x*1 )l

*Функция* erf(*x*) *антисимметрична относительно точки x* = 0*, так что*

erf(−*x*) = −erf(*x*)*. (18)*

*С помощью таблиц или графика* erf(*x*) *нетрудно найти вероятность того, что для искомой величины будет найдено значение, лежащее между* −*σ и σ, между* −2*σ и* 2*σ и между любыми другими значениями x:*

1 r ( 1 ) ( 1 )l ( 1 )

*P* (−*σ* � *x* � *σ*) = 2

erf

√2

− erf

−√2

= erf

√2

≈ 0*,*68*,*

*P* (−2*σ* � *x* � 2*σ*) ≈ 0*,*95*,*

*P* (−3*σ* � *x* � 3*σ*) = 1 − 0*,*0044*.*

*Вероятность найти величину x в заданных пределах при увеличении ширины интервала быстро приближается к единице.*

## *Рабuта 1.1.5*

### *Исследование упругих столкновений протонов* с электронами

*Цель работы: по фотографиям треков (следов) частиц (протонов и электронов) вычислить импульсы частиц и углы их разлета, срав- нить экспериментальные результаты с расчетами по нерелятивист- ским и релятивистским формулам и сделать вывод о применимости этих формул.*

*В работе используются: пленка с фотографиями событий в во- дородной пузырьковой камере, диапроектор с координатной сеткой для просмотра пленки.*

*Сегодня хорошо известно, что, за немногими исключениями, един-* ственным способом исследования атомных ядер и элементарных ча- стиц является осуществление их столкновений с последующей ре- гистрацией частиц, вылетевших после столкновения. Для изучения столкновений необходимо: 1) умение создавать пучки налетающих ча- стиц; 2) умение приготовить мишени, содержащие ядра или частицы, с которыми происходят столкновения; 3) умение регистрировать воз- можно большее число характеристик вылетающих частиц.

*Диапазон энергий вылетающих частиц во всех радиоактивных ис-* точниках ограничен несколькими МэВl. Заряженные частицы можно

*1 1 эl: (электрон-вольт)* = 1*,*6 · 10−19 *Дж.*

*разогнать до высоких значений энергии в специальных устройствах,* называемых ускорителями. В настоящее время в ускорителях получа- ют пучки частиц с энергией от нескольких МэВ до десятков ГэВ. Все существующие источники ядер и элементарных частиц делятся на ра- диоактивные препараты (первичные и вторичные частицы); ускорите- ли (первичные, вторичные и третичные пучки); ядерные реакторы и космические лучи.

*Список доступных мишеней также достаточно ограничен. В него* входят все стабильные ядра и электрон.

*Основная трудность регистрации частиц состоит в том, что эффект* воздействия частицы на вещество с макроскопической точки зрения чрезвычайно мал. Наиболее заметным эффектом такого рода является ионизация вещества заряженной частицей. В некоторых устройствах используется электромагнитное излучение заряженных частиц в сре- де. Нейтральные частицы регистрируются по вторичным эффектам. Главной частью регистрирующего устройства (детектора) является на- ходящаяся в неустойчивом состоянии некоторая физическая система: переохлажденный пар, перегретая жидкость, газ в предразрядном со- стоянии и т. д. Попадая в такую систему, микрочастица вызывает ка- тастрофу в макромире.

*В данной работе исследуются* упругие столкновения протонов с электронами на основе обработки экспериментальных данных, полу- ченных путем фотографирования



*p-*0

*-pe*

*p-*

*треков частиц в водородной пу-* зырьковой камере. Рабочим веще- ством в камере является перегретая

*\_lис. 1. Упругое соударение протона с неподвижным электроном*

*(выше точки кипения) жидкость. Трек (след) заряженной частицы об-* разуется пузырьками пара. Механизм образования пузырьков точно неизвестен.

*Рассмотрим упругое столкновение протона с неподвижным элек-* троном. На рис. 1 показаны: *-p*0 *- импульс протона до соударения, p- -* импульс протона после соударения, *p-e - импульс электрона, ϕ и θ -* углы, на которые отклоняются после соударения импульсы протона и электрона относительно направления импульса протона до соударения.

*Из закона сохранения импульса для проекций на направление им-* пульса протона до соударения и перпендикулярное ему получаем

*p*0 = *p* cos *ϕ* + *pe* cos *θ, p* sin *ϕ* = *pe* sin *θ.*

*(1)*

*Исключая из этих уравнений угол ϕ, имеем*

(*p*0 − *pe* cos *θ*)2 + *p*2 sin2 *θ* = *p*2

*e*

*или*

*p*2 − 2*p*0*pe* cos *θ* + *p*2 = *p*2*. (2)*

*Это соотношение является следствием закона сохранения импульса* и выполняется как в нерелятивистской, так и в релятивистской меха- нике.

0

*e*

*При рассмотрении закона сохранения энергии необходимо иметь в* виду, что релятивистские и классические формулы для энергии частиц различны. В классической (нерелятивистской) механике кинетическая энергия через массу, скорость и импульс выражается следующим обра-

*зом:*

*mv*2 *p*2

*Eк* =

= *. (3)*

1. 2*m*

*Обозначая массу протона M, а массу электрона m и используя вве-* денные выше (см. рис. 1) обозначения импульсов протона и электрона, получаем закон сохранения кинетической энергии для нерелятивист- ского движения частиц:

*p*2 *p*2

0

=

2*M* 2*M*

*p*2

+ *. (4)*

*e*

2*m*

*Исключая из (2) и (4) импульс протона после соударения, получаем*

*или*

*M*

*e*

*p* (1 + *m* ) = 2*p*

*m*

0 cos *θ (5)*

*M*

cos *θ* = *M* + *m* · *pe . (6)*

2*m*

*p*0

*Видно, что импульс, который приобретает электрон, линейно свя-* зан с косинусом угла его отклонения. Импульс растет с уменьшением угла. Учитывая, что *M/m* ≈ 2000*, имеем*

*m*

*pe* ≈ 2*p*0 *M* cos *θ. (7)*

*Отсюда следует, что в этом случае максимальное значение импуль-* са электрона

*pem x* ≈ 0*,*001*p*0*. (8)*

*Из соотношений (1) при этом получаем, что p* ≈ *p*0 *и θ* ≫ *ϕ.*

*В релятивистской механике для выполнения законов сохранения* импульса и энергии в различных системах отсчета потребовалось но- вое определение импульса и энергии, их связи со скоростью движения частиц:

*p* =

*mv*

*, (9)*

*v*2

1 − *c*2

*mc*2

*E* =

*. (10)*

*v*2

1 − *c*2

*Здесь v - скорость частицы, c - скорость света, m - масса частицы.*

*Вводя обозначения*

*v*

*β* = *(11)*

*c*

*и*

##### 1

*γ* = 1 − *β*2 *, (12)*

*из соотношений (9) и (10) можно получить*

*E* = *γmc*2*, (13)*

*E*

*p* = *c*2 *v* = *γβmc, (14)*

*E*2 = *p*2*c*2 + *m*2*c*4*. (15)*

*В релятивистской механике полная энергия свободной частицы* *γmc*2 *складывается из кинетической энергии* (*γ* 1)*mc*2 *и энергии по-* коя *mc*2*.*

−

*Обозначим энергию протона до соударения E*0*, а после соударе-* ния - *E. Энергия электрона после соударения - Ee, а до соударения* она равнялась энергии покоя электрона *mc*2*. Сохранение полной энер-* гии протона и электрона дает

*E*0 + *mc*2 = *E* + *Ee. (16)*

*Отметим, что при упругом соударении после взаимодействия оста-* ются те же частицы, что и до взаимодействия. Поэтому сохраняется

*кинетическая энергия системы, которая для каждой частицы равна* разности полной энергии и энергии покоя. Для электрона

*K* = *Ee* − *mc*2*. (17)*

*Подставим в (15) p из (2) и E из (16):*

(*E*0 + *mc*2 − *Ee*)2 = (*p*2 − 2*p*0*pe* cos *θ* + *p*2)*c*2 + *M* 2*c*4

0

*e*

*и упростим это выражение, учитывая, что E*2 = *p*2*c*2 + *M* 2*c*4 *и E*2 =

= *p*2*c*2 + *m*2*c*4*,*

*e*

1. 0 *e*

*m*2*c*4 + *E*0*mc*2 − *E*0*Ee* − *mc*2*Ee* = −*p*0*pec*2 cos *θ,*

*откуда получаем связь между импульсом электрона pe и углом θ:*

*E*0*Ee* + *mc*2*Ee* − *E*0*mc*2 − *m*2*c*4 (*E*0 + *mc*2)(*Ee* − *mc*2) *pe*

cos *θ* =

=

*p*0*pec*2 = *p*2*c*2 *p*0

(*E*0 + *mc*2)(*Ee* − *mc*2) *pe*

*e*

= =

*E*2 − (*mc*2)2 *p*0

*e*

*E*0 + *mc*2 *pe M* + *m* + *K*0*/c*2 *pe*

= *E* + *mc*2 *p*0 = 2*m* + *K /c*2 · *p*

*e*

*e* 0

*. (18)*

*При скоростях, малых по сравнению со скоростью света, кинети-* ческой энергией можно пренебречь по сравнению с энергией покоя, и тогда (18) переходит в (6).

*Используя связь энергии электрона с импульсом (15), получаем за-* висимость между углом отклонения электрона (от направления дви- жения протона до соударения) и его импульсом:

*E*0 + *mc*2 *pe*

cos *θ* =

*p*0 · *p*2*c*2 + *m*2*c*4 + *mc*2 *. (19)*

*Видно, что между импульсом и косинусом угла зависимость нели-* нейная. Косинус угла при увеличении импульса растет медленнее, чем в нерелятивистском случае.

*e*

*Формулу (19) удобно переписать, введя безразмерную величину*

*pec*  *p*0*c p*0*c*

*z* = = cos *θ* ≈ cos *θ* = *β* cos *θ. (20)*

*Ee* + *mc*2 *E*0 + *mc*2 *E*0

*Эта величина линейно зависит от* cos *θ. График зависимости z*(cos *θ*) *может быть использован для определения начального импульса прото-* нов.

*Как уже отмечалось, исследование упругих столкновений прото-* нов с электронами проводилось в пузырьковой камере, помещенной в постоянное магнитное поле. Пузырьковая камера представляет со- бой цилиндр, наполненный жидкостью, находящейся при температуре, близкой к температуре кипения. От кипения жидкость удерживается высоким давлением, создаваемым поршнем или мембраной в одном из оснований цилиндра. При внезапном понижении давления, кото- рое производится в момент регистрации событий в камере, жидкость оказывается перегретой и в течение некоторого времени находится в неустойчивом состоянии. Если в это время (несколько миллисекунд) через камеру пролетит заряженная частица, то она вызовет вскипа- ние жидкости вдоль своего следа, и ее путь будет отмечен цепочкой пузырьков пара. Рабочая жидкость в пузырьковой камере служит од- новременно и мишенью для налетающих частиц и детектором. Для наполнения камер часто применяется жидкий водород, позволяющий наблюдать взаимодействие быстрых частиц с протонами, являющими- ся ядрами атома водорода, или электронами из электронных оболочек атомов. Рабочий режим такой камеры: температура жидкого водорода

*29 К, давление 5 атм.*

*Преимущество пузырьковой камеры по сравнению с камерой Виль-* сона в том, что плотность среды, в которой летят частицы, значительно больше, и пробеги (пути до соударения) меньше, то есть большее коли- чество взаимодействий можно зарегистрировать при одном и том же размере поля наблюдения. В настоящее время пузырьковые камеры не используются. Основным инструментом в качестве трекового детекто- ра частиц стали искровые камеры.

*Пузырьковая камера, в которой получены фотографии треков ча-* стиц, находилась в однородном постоянном магнитном поле *B- , перпен-*

*дикулярном плоскости фотографирования. Напомним, что на частицу,* имеющую электрический заряд *e и движущуюся в магнитном поле B-* *со скоростью -v, действует сила Лоренца:*

*F-* = *e -v* × *B- . (21)*

*В рассматриваемых случаях с хорошей степенью точности можно* считать, что *-v и B- взаимно перпендикулярны. Сила Лоренца перпенди-* кулярна скорости, то есть вызывает центростремительное ускорение, и

*движение заряженной частицы происходит по окружности. Обозначая* радиус окружности *r, а импульс частицы p, имеем*

*mv*2

= *evB, (22)*

*r*

*или*

*p* = *eBr. (23)*

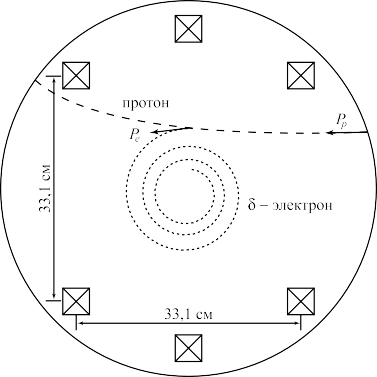
*Эта формула справедлива как в классической, так и в релятивистской* механике.

*В рассматриваемых далее случаях B* = 2 *Тл. Если pc измеряется в* мегаэлектрон-вольтах (МэВ), а *r - в сантиметрах, то*

*pc* = 6*r. (24)*

*Работа с фотопленкой начинается с установки ее в диапроектор и* фокусировки изображения на экран. Направление, в котором проис- ходит перемещение пленки, будем считать направлением оси абсцисс координатной сетки. Затем пленка просматривается, и отбираются под- ходящие фотографии.

*На фотографиях видны треки - траектории всех пролетающих че-* рез камеру заряженных частиц. Протоны испытывают соударения как с атомными ядрами (в нашем случае с ядрами водорода, то есть с про- тонами), так и с атомными электронами. В первом случае происходят либо упругие соударения протонов, либо ядерные реакции, чаще всего сопровождающиеся рождением пионов. В обоих случаях траектория налетающего протона имеет резкий излом.

*При соударении быстрых прото-* нов с атомными электронами траек- тории налетающих протонов практи- чески не имеют изломов, так как тя- желые протоны сталкиваются с лег- кими электронами. Траектории от- летающих электронов, называемых обычно *δ-электронами, искривляют-* ся под действием магнитного поля. Как видно из (23), радиус кривизны траектории пропорционален импуль- су частицы. Для электронов он ока- зывается значительно меньше, чем

*для протонов. Торможение электро-*

*\_lис. 2*

*на из-за взаимодействия с окружаю-* щей средой приводит к уменьшению

*его импульса и, следовательно, радиуса кривизны траектории, которая* превращается в спираль (см. рис. 2).

*Имеющиеся на рисунке кресты (в квадратиках) представляют мет-* ки, нанесенные на стекло пузырьковой камеры, через которое ведется фотографирование, для определения масштаба картины.

*Кроме треков δ-электронов, наблюдаются следы электронов, не свя-* занные с траекториями протонов. Такие электроны, возникающие как бы из ничего, появляются при рассеянии *γ-квантов (жесткого электро-* магнитного излучения) на электронах. На фотографиях могут быть также видны расходящиеся из одной точки и изгибающиеся в разные стороны треки пар частиц *e*+ *и e*−*. Такие электрон-позитронные пары*

*рождаются γ-квантами в поле ядра.*

*Для измерений пригодны не все снимки, а только те из них, на кото-* рых центры последовательных витков спирали мало смещаются друг относительно друга, и диаметр первого витка спирали на экране про- ектора больше 8-10 мм. Не следует использовать для анализа случаи,

*когда электрон вылетел под углом меньше 2-3*◦*. Дело в том, что кроме* измеряемого угла, лежащего в плоскости пленки, всегда присутствует

*и составляющая часть угла, лежащая в плоскости, перпендикулярной* пленке. В тех случаях, когда измеряемый угол невелик, резко возрас- тает погрешность, связанная с тем, что мы не учитываем вклад не из- меренной части угла. При отборе снимков также следует иметь в виду, что вероятность возникновения *δ-электронов обратно пропорциональ-* на квадрату их кинетической энергии, поэтому основное количество *δ-электронов имеет небольшую энергию и, следовательно, малый ра-* диус траектории. Это усложняет измерения. Старайтесь выбирать как

*<узкие>, так и <широкие> спирали.*

*Измерения производятся при помощи объектива с двадцативосьми-* кратным увеличением ( 28*). Масштаб, в котором следы электронов в* камере проецируются на экран диапроектора, определяется по извест- ному расстоянию между метками, нанесенными на стекло пузырьковой камеры (крестами). Этот масштаб в нашем случае равен *K* = 0*,*427*. На* этот коэффициент необходимо умножать измеренные на экране проек- тора радиусы кривизны *R, чтобы получить величину соответствующих* радиусов *r в пузырьковой камере. Заметим, что на рис. 2 изображен* весь кадр целиком. Увидеть его полностью можно, если использовать объектив с меньшим увеличением.

×

*По фотографиям можно определить угол между траекторией про-* тона и начальным участком спирали, по которой летит электрон. По радиусу кривизны начального участка спирали определяется импульс электрона. Таким образом, из экспериментов получается связь меж- ду импульсом электрона и углом, который составляет направление его импульса с направлением импульса протона до соударения. Сравнение этого соотношения с теоретическими формулами (6) и (18) позволит сделать вывод о необходимости учета релятивистских эффектов.

*Радиус кривизны траектории электрона R и угол θ вылета его отно-* сительно направления движения протона до соударения определяются следующим образом. Отобранное для измерения изображение соуда- рения располагают в центре экрана проектора так, как это показано на рис. 3 и 4. Точку вылета *δ-электрона, которую обозначаем (x*1*, y*1*),* принимаем за начало системы координат, а ось *x направляем по каса-* тельной к следу протона. Ось *y соответственно перпендикулярна оси x.* Предполагаем, что начальный участок спирали близок к окружности и описывается уравнением

(*x* − *x*0)2 + (*y* − *y*0)2 = *R*2*. (25)*

*Здесь x*0 *и y*0 *- координаты центра окружности, а R - ее радиус.*

*На рис. 3 и 4 показаны два возможных направления движения элек-* трона относительно направления движения протона. В первом случае центр окружности находится слева от оси *y, а во втором - справа.* В обоих случаях угол *α, который составляет радиус, проведенный из* центра окружности (*x*0*, y*0*) в начало координат (x*1*, y*1*), с осью y, равен* *θ, и для его определения необходимо знать R и y*0*. Тогда*

*y*0

cos *θ* =

*. (26)*

*R*

*По измеренному на экране радиусу окружности R вычисляется ра-* диус траектории в пузырьковой камере *r* = 0*,*427*R, а затем по формуле*

*(24) импульс электрона.*

*Радиус окружности и координаты ее центра можно найти по коор-* динатам трех точек, через которые она проходит. Одна из точек - это центр системы координат (*x*1*, y*1*). На рис. 3 удобно взять еще пересече-* ние окружности с осью *y - точку (x*3*, y*3*) и некоторую промежуточную* (*x*2*, y*2*). Подставляя координаты этих точек в (25), получаем три урав-* нения:

*x*2 + *y*2 = *R*2*,*

0 0

0

*Откуда*

(*x*2 − *x*0)2 + (*y*2 − *y*0)2 = *R*2*, x*2 + (*y*3 − *y*0)2 = *R*2*.*

*(27)*

*y*0 =

2 2

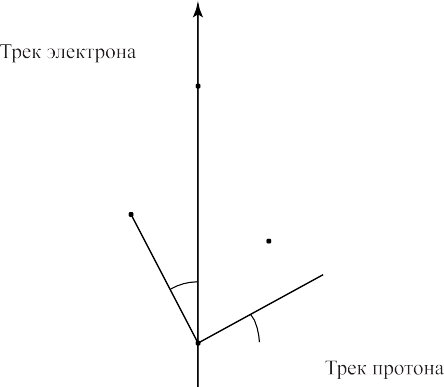
3 *, x*0 = 2 2 *. (28)*

*x* + *y* − *y*2*y*3

*y*

##### 2 2*x*2

*В случае, показанном на рис. 4, кроме начала координат, удобно* взять точку пересечения окружности с осью *x, обозначенную (x*2*, y*2*),*



*y*

(*x*3*, y*3)

(*x*0*, y*0)

(*x*2*, y*2)

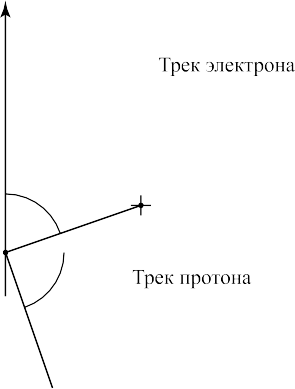
*θ*

*θ*

*x*

(*x*1*, y*1)

*\_lис. 3*



*y*

(*x*3*, y*3)

*θ* (*x*0*, y*0)

(*x*2*, y*2)

*x*

(*x*1*, y*1)

*θ*

*\_lис. 4*

*и произвольную точку (x*3*, y*3*). В этом случае получаем систему урав-* нений:

*x*2 + *y*2 = *R*2*,*

0 0

*И, следовательно,*

(*x*2 − *x*0)2 + *y*2 = *R*2*,*

(*x*3 − *x*0)2 + (*y*3 − *y*0)2 = *R*2*.*

0

*(29)*

*x*0 =

2 2

2 *, y*0 = 3 3 *. (30)*

*x* + *y* − *x*2*x*3

*x*

##### 2 2*y*3

*Если форма траектории не сильно отличается от окружности* вплоть до пересечения ее с осью *y, то в качестве третьей точки удобно* взять эту точку пересечения. Тогда

*x*0 =

*x*2

*, y*0 =

##### 2

*y*3

*. (31)*

##### 2

*Радиус окружности всегда находим по формуле*

*R* = ✓*x*2 + *y*2*. (32)*

0

0

*Для проверки полезно также непосредственно измерить расстояние* между началом координат и центром окружности по изображению тра- ектории *δ-электрона на экране, используя координатную сетку.*

*В физике элементарных частиц обычно используется система еди-* ниц, в которой энергия измеряется в электрон-вольтах (эВ) или про- изводных единицах: килоэлектрон-вольтах (1 *кэВ* = 103 *эВ), мегаэлек-* трон-вольтах (1 *МэВ* = 106 *эВ), гигаэлектрон-вольтах (*1 *ГэВ* = 109 *эВ).*

1. *эВ* = 1*,*60202 10−19 *Дж* = 1*,*60202 10−12 *эрг. Вместо импульса и массы используют pc и mc*2*, которые имеют размерность энергии и выража-*

· ·

*ются в электрон-вольтах. В этой системе единиц расчеты существенно* упрощаются. Применение указанной системы единиц в данной работе является обязательным. Массы электрона и протона: *mc*2 = 0*,*511 *МэВ,* *Mc*2 = 938 *МэВ.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Подготовьте таблицу для записи результатов измерений и расчетов:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *N* | *x*2*, мм* | *y*2 *, мм* | *y*3 *, мм* | *Rэкр, мм* | *R,*  *мм* | cos *θ* | *pec,*  *МэВ* | *z* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Здесь N - порядковый номер рассмотренного трека, Rэкр - радиус,* измеренный на экране.

*2. С помощью 28-кратного объектива сфокусируйте изображение треков* на экран.

*3. Выберите подходящий трек электрона (угол вылета больше 2-3*◦*, диа-* метр первого витка 8-80 мм).

*4. Точку вылета δ-электрона примите за начало координат (x*1*, y*1*), а* первоначальный след протона направьте по оси *x (см. рис. 3).*

*5. Измерьте и запишите в таблицу координаты точек на треке: x*2*, y*2*, y*3 *для случаев, подобных изображенному на рис. 3, x*2*, x*3*, y*3 *или x*2*, y*3 *для случаев, подобных изображенному на рис. 4.*

*6. Измерьте и запишите в таблицу радиус первого витка спирали (тре-* ка) *R.*

*7. Повторите измерения по пунктам 3-6 для 40-50 треков.*

*8. Вычислите по формулам (28), (30) или (31) координаты центра окруж-* ности, радиус окружности - по формуле (32), косинус угла вылета электрона - по (26), импульс электрона, умноженный на скорость све- та, - по (24) с учетом связи *r* = 0*,*427*R, z*(cos *θ*) *- по (20) и запишите* все в таблицу.

*9. Нанесите точки с координатами (pec,* cos *θ) на график. На этот же гра-* фик нанесите зависимость *cpe*(cos *θ*)*, вычисленную по нерелятивист-* ской (7) и релятивистской (19) формулам.

*10. Нанесите значения z и* cos *θ на график в координатах z,* cos *θ. Прове-* дите через полученные точки прямую, проходящую через начало ко- ординат (желательно использовать метод наименьших квадратов). По наклону этой зависимости и формуле (20) с использованием (9), (10) и

*(15) вычислите импульс налетающего протона, его энергию, отношение* его скорости к скорости света *β* = *v/c и величину γ* = 1*/* 1 − *β*2*.*

*11. Оцените случайную погрешность определения импульса и энергии про-* тонов графическим методом. Для этого проведите через начало коор- динат еще две прямые с наклонами *β* ∆*β (β - наклон наилучшей пря-* мой, проведенной в предыдущем пункте задания), подобрав ∆*β таким* образом, чтобы между прямыми оказалось примерно две трети всех точек. Рассчитайте погрешность определения импульса, например, по

±

*формуле*

∆*p* ≈

*p*(*β* + ∆*β*) *p*(*β*)

√*n*

−

*и сравните полученное значение с погрешностью метода наименьших* квадратов (1.40).

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Выведите формулы, связывающие угол вылета электрона с его импульсом, в нерелятивистской и релятивистской механике.*

*2. Получите зависимость скорости частиц в релятивистской механике от их импульса и энергии.*

*3. Выведите формулу, связывающую импульс электрона с радиусом его тра- ектории в магнитном поле. Покажите, что эта формула справедлива как в нерелятивистской механике, так и в релятивистской.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. - М.: Наука, 1980. Т. IV. § 111. Т. V. Ч. 2. § 86.*

*2. Киттелъ Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. - М.: Наука, 1983. Гл. 11, 12.*

*3. Копылов Г.И. Всего лишь кинематика. - М.: Наука, 1981.*

*4. Bелону'Чкин В.Е. Относительно относительности: Учеб. пособие / МФТИ. М., 1996.*

*5. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. 1. Гл. 10.*

### *Образец отчета о выполнении работы* *1.1.5*

*В работе используются: пленка с фотографиями событий в водородной пузырьковой камере, диапроектор с координатной сеткой для просмотра пленки.*

*Импульс электрона и угол, под которым он начинает движение относи- тельно начального направления движения протона, (угол вылета), определя- ем по параметрам его траектории в магнитном поле. Начальная часть спи- ральной траектории аппроксимируется дугой окружности. Радиус окружно- сти и угол вылета электрона определяем по координатам точек, лежащих на дуге окружности, x*2*, y*2 *, y*3 *(см. рис. 3). Эти исходные данные представлены в таблице 1. Начало системы координат находится в точке вылета электрона. Координаты измерены на экране в миллиметрах с погрешностью 1 мм.*

*В таблицу занесены и результаты расчета. Радиус окружности и косинус угла вылета вычисляются по формулам (32), (28) и (26).*

*Импульс электрона вычислен по формуле (24), в которой r* = 0*,*0427*R*

*(так как R в мм). Значения z получены по формуле (20). Погрешности можно получить, воспользовавшись формулой (1.33).*

*На рис. 5 нанесены расчетные точки в координатах pec,* cos *θ. Большой разброс точек связан с большими погрешностями измерений.*

*Видно, что импульс электрона растет при увеличении* cos *θ (уменьшении угла).*

*В нерелятивистском случае импульс электрона при одинаковой энергии протонов в пучке определяется формулой (7) и меняется линейно в зависи- мости от* cos *θ.*

*В релятивистском случае эта зависимость определяется формулой (19)*

*и является нелинейной. Удобно ввести функцию*

*pec*

* *p c* + *m c* + *mc E* + *mc* ≈ *E*

*p*0*c*

*p*0*c*

*z* = 2 2 2 4 2 = 0 2 cos *θ* 0 cos *θ* = *β* cos *θ.*

*e*

*Эта функция линейно зависит от* cos *θ и дает возможность определить ско- рость налетающих протонов графически.*

*В таблице 1 приведены вычисленные значения z.*

*На рис. 6 приведены результаты и проведена линия по методу наимень- ших квадратов (формулы (1.39) и (1.40)).*

*Наклон прямой β* = 0*,*936 ± 0*,*014*.*

*Относительная погрешность определения β методом наименьших квад- ратов:*

∆*β* = 0*,*014 = 0*,*015 = 1*,*5%*.*

*β* 0*,*936

*Оценим случайную погрешность определения β графически. Для это- го проводим еще две прямые, так чтобы вне их оказалось примерно по* 40 · 1*/*3 · 1*/*2 ≈ 7 *точек. Наклоны этих прямых отличаются от наклона наи- лучшей прямой на* ±0*,*08*. Случайная погрешность β равна*

0*,*08

∆*β* = √40 ≈ 0*,*013;

∆*β* = 0*,*14 = 1*,*4%*,*

*β*

*что соответствует результатам метода наименьших квадратов.*

*Находим γ:*

1

✓

*γ* = 1 − 0*,*9362 = 2*,*84*.*

*Из формул (1.33) и (12) получаем погрешность определения γ:*

∆*γ* 2

2 ∆*β*

2 ∆*β*

= *γ β*

*γ*

*β* ≈ *γ*

*β* ≈ 8 · 1*,*5% = 12%*.*

*Окончательно: γ* = 2*,*8 ± 0*,*3*.*

*Начальный импульс протона находим по формуле (14):*

*p*0*c* = *γβmc*2 = 2*,*8 · 0*,*936 · 938 *МэВ* = 2*,*5 ± 0*,*3 *ГэВ.*

*Начальная энергия протона*

*E*0 = *γmc*2 = 2*,*8 · 938 *МэВ* = 2*,*6 ± 0*,*3 *ГэВ.*

*Скорость протонов v* = *βc* = 0*,*936 *c. На рис. 5 пунктиром показана зави- симость p*(cos *θ*)*, рассчитанная для таких протонов по нерелятивистской фор- муле (7). Сплошной линией там же показана релятивистская зависимость (19).*

*Видно, что для определения импульса электрона нужно было пользовать- ся релятивистскими формулами.*

*Т а б л и ц а* *1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *п/п* | *x*2  *мм* | *y*2  *мм* | *y*3  *мм* | *R*  *мм* | *Rэкр*  *мм* | cos *θ* | *pec*  *МэВ* | *z* |
| *1* | *7,5* | *10* | *24* | *13,2* | *13* | *0,91* | *3,4* | *0,861* |
| *2* | *8* | *15* | *25* | *13,6* | *13* | *0,919* | *3,5* | *0,864* |
| *3* | *3* | *3* | *8,5* | *4,4* | *4* | *0,95* | *1,1* | *0,64* |
| *4* | *2* | *5* | *10,5* | *8* | *8* | *0,66* | *2,0* | *0,78* |
| *5* | *11,5* | *20* | *33,5* | *17,8* | *18* | *0,94* | *4,6* | *0,895* |
| *6* | *29* | *20* | *40,5* | *21,6* | *22* | *0,939* | *5,5* | *0,911* |
| *7* | *11,5* | *20* | *40* | *23* | *23* | *0,87* | *5,8* | *0,916* |
| *8* | *15* | *10* | *15,5* | *9,6* | *10* | *0,81* | *2,5* | *0,816* |
| *9* | *18* | *23* | *45* | *23,1* | *23* | *0,97* | *5,9* | *0,917* |
| *10* | *8* | *10* | *19,5* | *9,9* | *10* | *0,98* | *2,5* | *0,822* |
| *11* | *6* | *3* | *6* | *3,8* | *4* | *0,8* | *0,97* | *0,60* |
| *12* | *2,5* | *5* | *10,5* | *7* | *7* | *0,78* | *1,7* | *0,75* |
| *13* | *6,5* | *8* | *13,5* | *6,8* | *7* | *0,99* | *1,74* | *0,75* |
| *14* | *22,5* | *15* | *22* | *14,2* | *14* | *0,77* | *3,64* | *0,869* |
| *15* | *24* | *30* | *57* | *28,9* | *29* | *0,98* | *7,4* | *0,933* |
| *16* | *9,5* | *15* | *28,5* | *15,4* | *15* | *0,92* | *3,9* | *0,879* |
| *17* | *37,5* | *47* | *94* | *48,1* | *48* | *0,97* | *12,32* | *0,959* |
| *18* | *21,5* | *12,5* | *24,5* | *14,2* | *14* | *0,86* | *3,64* | *0,869* |
| *19* | *30* | *23* | *47* | *24,2* | *24* | *0,97* | *6,2* | *0,921* |
| *20* | *21* | *15* | *27* | *14,9* | *15* | *0,91* | *3,82* | *0,875* |
| *21* | *5* | *10* | *19* | *12* | *12* | *0,82* | *2,9* | *0,84* |
| *22* | *22* | *27* | *50,5* | *22,5* | *22* | *0,99* | *6,53* | *0,925* |
| *23* | *6* | *10* | *19* | *10,5* | *10* | *0,9* | *2,7* | *0,828* |
| *24* | *12,5* | *8* | *19* | *9,9* | *9* | *0,96* | *2,53* | *0,818* |
| *25* | *2,5* | *7,5* | *12* | *8* | *8* | *0,7* | *2,1* | *0,79* |
| *26* | *7,5* | *10* | *21* | *11,1* | *11* | *0,95* | *2,8* | *0,836* |
| *27* | *19,5* | *15* | *30,5* | *15,7* | *16* | *0,97* | *4,02* | *0,881* |
| *28* | *17* | *20* | *40,5* | *20,6* | *20* | *0,98* | *5,28* | *0,908* |
| *29* | *16* | *24* | *47,5* | *25,6* | *25* | *0,93* | *6,6* | *0,925* |
| *30* | *9* | *6* | *10,5* | *6,0* | *6* | *0,87* | *1,55* | *0,72* |
| *31* | *5,5* | *9* | *17* | *9,3* | *9* | *0,9* | *2,4* | *0,81* |
| *32* | *10* | *15* | *28,5* | *15,1* | *15* | *0,94* | *3,9* | *0,877* |
| *33* | *35,5* | *26* | *51,5* | *28,2* | *28* | *0,96* | *7,22* | *0,932* |
| *34* | *24,5* | *19* | *38* | *19,6* | *20* | *0,97* | *5,02* | *0,903* |
| *35* | *12,5* | *12,5* | *22* | *11,1* | *11* | *0,99* | *2,84* | *0,836* |
| *36* | *8* | *15* | *28,5* | *17* | *17* | *0,85* | *4,3* | *0,888* |
| *37* | *33* | *40* | *81* | *41,4* | *41* | *0,98* | *10,61* | *0,953* |
| *38* | *11* | *16* | *32,5* | *17,5* | *18* | *0,93* | *4,5* | *0,892* |
| *39* | *12,5* | *17* | *35* | *18,5* | *18* | *0,95* | *4,7* | *0,898* |
| *40* | *34,5* | *40* | *80* | *40,4* | *40* | *0,99* | *10,35* | *0,952* |

*pec*

*МэВ*

*10*

*8*

*6*

*4*

*2*

*0*

*0 0,2 0,4 0,6 0,8* cos *θ*

*\_lис. . 'рафик зависимости pec*(cos *θ*)

*z*

*0,8*

*0,6*

*0,4*

*0,2*

*0*

*0 0,2 0,4 0,6 0,8* cos *θ*

*\_lис. 6. 'рафик зависимости z*(cos *θ*)

## *Рабuта 1.1.6*

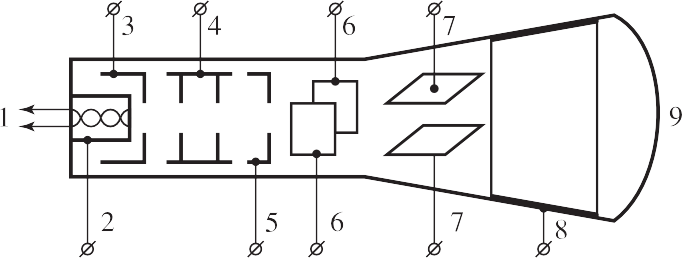
### *Изучение электронного осциллографа*

*Цель работы: ознакомление с устройством и работой осциллографа и изучение его основных характеристик.*

*В работе используются: осциллограф, генераторы электрических сигналов, соединительные кабели.*

*Осциллограф - регистрирующий прибор, в котором исследуемое* напряжение (сигнал) преобразуется в видимый на экране график из- менения напряжения во времени. Осциллограф широко используется в физическом эксперименте. С его помощью можно исследовать из- менение во времени любых физических величин, которые могут быть преобразованы в электрические сигналы.

*Лабораторная работа проводится с использованием учебного осцил-* лографа, разработанного на основе осциллографов С1-94 и С1-1.





*\_lис. 1. Электронно-лучевая трубка*

*ЭJектрuннu Jученан трубка. Основной частью электронного ос-* циллографа, определяющей его важнейшие технические характеристи- ки, является электронно-лучевая трубка (ЭЛТ). Трубка представляет собой стеклянную откачанную до высокого вакуума колбу, в которой расположены (рис. 1): подогреватель катода 1, катод 2, модулятор *3*

*(электрод, управляющий яркостью изображения), первый (фокусиру-* ющий) анод 4, второй (ускоряющий) анод 5, горизонтально и верти- кально отклоняющие пластины 6 и 7, третий (ускоряющий) анод 8, экран 9.



*\_lис. 2. Oтклонение луча в электрическом поле пластин Электронный пучок формируется системой электродов, называе-*

*мой <электронной пушкой>: катод с нагревателем, модулятор, фокуси-* рующий и ускоряющий аноды. Форма, размеры и расположение элек- тродов подобраны таким образом, чтобы разгонять электроны и фоку- сировать пучок на экране. Потенциал первого (фокусирующего) анода относительно катода можно изменять ручкой <ФОКУС>. Размер пят- на на экране в значительной степени определяется качеством фоку- сирующей системы, его диаметр обычно не превышает 1 мм. Яркость пятна на экране осциллографа определяется током электронного луча, который может регулироваться изменением напряжения на модулято- ре ручкой <ЯРКОСТЬ>. Экраном осциллографа является покрытая флюоресцирующим веществом стенка трубки, на которую попадает электронный пучок.

*На пути к экрану сформированный пучок электронов проходит две* пары отклоняющих пластин. Две вертикально расположенные пласти- ны образуют плоский конденсатор, электрическое поле которого спо- собно отклонять пучок в горизонтальном направлении (горизонтально отклоняющие пластины). Аналогично поле горизонтально расположен- ных пластин вызывает вертикальное отклонение пучка (вертикально отклоняющие пластины). Подавая на пластины соответствующие на- пряжения, можно <нарисовать> электронным лучом на экране некото- рую фигуру.

*Рассмотрим движение электронов в электрическом поле отклоня-* ющих пластин (рис. 2). Пусть электрон со скоростью *v*0 *влетает в од-* нородное электрическое поле пары пластин и движется вдоль оси *z,* т. е. перпендикулярно к линиям напряженности электрического поля. Движение электрона вдоль оси *z является равномерным, а вдоль оси* *y - равноускоренным:*

*z* = *v*0*t, y* =

*at*2

##### 2

*. (1)*

*Ускорение можно найти с помощью второго закона Ньютона:*

*a* = *eEy . (2)*

*m*

*Из (1) и (2) найдем*

*y* = *eEy z*2*. (3)*

2*mv*2

0

*Как следует из (3), траектория электрона между отклоняющими пла-* стинами представляет собой параболу. На выходе из пластин электрон отклоняется от первоначального направления на расстояние *h*1 *и летит* под углом *α к оси z:*

*h* = *eEy l*2*,* tg *α* = *eEy l , (4)*

1 1

2*mv*2 1 *mv*2

0

0

*где l*1 *- длина пластин. Выйдя из пластин, электрон движется по пря-* мой. Смещение *h электронного пятна на экране осциллографа получим* из рис. 2:

*h* = *h*1 + *l*2 tg *α* = *eEyl*1 *l*1 + *l*2 *. (5)*

*mv*2

2

0

*гда*

*Обозначим расстояние от середины пластин до экрана через L. То-*

*h* = *eEyl*1*L. (6)*

*mv*2

0

*Скорость v*0*, которую имеют электроны, проходящие между пласти-*

*нами, определяется ускоряющим напряжением Ua на втором аноде:*

*mv*2

0

= *eUa. (7)*

##### 2

*Напряженность Ey электрического поля между отклоняющими пла-* стинами

*E* = *Uy , (8)*

*y d*

*где Uy - разность потенциалов между пластинами, а d - расстояние* между ними. Окончательно из (6) - (8) получим

*l*1*L*

*h* =

2*dUa*

*Uy. (9)*

*Таким образом, смещение луча пропорционально отклоняющему на-* пряжению *Uy. Коэффициент пропорциональности в (9) называется* чувствительностью *k трубки к напряжению:*

*k* = *h* = *l*1*L*   *см* *. (10)*

*Uy*

2*dUa*

*В*

*Аналогично вычисляется чувствительность трубки к напряжению на* второй паре пластин.

*Формула (9) применима и в том случае, когда на отклоняющие пла-* стины подается переменное напряжение, но при условии, что оно мало изменяется за время *τ пролета электрона между пластинами. Харак-* терными интервалами времени *T , которое определяет скорость изме-* нения переменного сигнала, могут быть: период сигнала, длительность импульса, время нарастания сигнала до некоторого уровня и т. д. Оце- ним минимальное значение *Tмин времени T , при котором выполняется* условие: *Tмин τ. Скорость электронов после вылета из <электронной* пушки> составляет примерно 2 107 *м/с (при Ua* 103 *В). Полагая l* =

· ≈

≫

= 3 *см, для времени пролета τ получим: τ* = 1*,*5 10−9 *с. Тогда, выбирая* условие *Tмин/τ* 1/ 10 *в качестве критерия применимости формулы (9)* для переменного сигнала, имеем *Tмин* = 15 10−9 *с. Таким образом, вы-* ражение (9) будет определять координаты точки попадания электрона

·

·

*на экран ЭЛТ, если частота синусоидального напряжения, подаваемо-* го на отклоняющие пластины, не превышает 108 *Гц* = 0*,*1 *ГГц.*

∼

*На практике, однако, максимальная частота оказывается суще-*

*ственно меньше. Чувствительность трубки к напряжению составляет* доли мм/В, поэтому исследуемый сигнал, подаваемый на отклоняющие пластины, приходится предварительно усиливать. Всякий усилитель характеризуется диапазоном частот, в пределах которого его коэффи- циент усиления практически не меняется, а вне этого диапазона рез- ко падает. Граничная (максимальная) частота усилителя определяется постоянной времени электрической схемы осциллографа. Как правило, рабочий диапазон частот осциллографа ограничивается именно рабо- чим диапазоном частот усилителя, на который подается исследуемый сигнал.

*Таким образом, в рабочем диапазоне частот осциллографа (для* учебного осциллографа 0-1 МГц) смещение луча по вертикали (или

*горизонтали) на экране ЭЛТ можно считать пропорциональным мгно-* венному значению напряжения на соответствующих отклоняющих пла- стинах.

*Разнертка. Из формулы (9) следует, что координаты x и y точки попа-* дания электронного луча на ЭЛТ (относительно ее центра) пропорцио- нальны мгновенным значениям напряжений *Ux*(*t*) *и Uy*(*t*)*, подаваемых* на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины.

*Так как величина исследуемых сигналов лежит в достаточно ши-* роком диапазоне (от десятка микровольт до сотен вольт), а чувстви- тельность отклоняющих пластин ЭЛТ по напряжению сравнительно невелика (доли мм/В), то в зависимости от величины подаваемого на вход сигнала его необходимо усиливать или, в случае большого сигна- ла, предварительно ослаблять.

*Для усиления слабых сигналов в осциллографе имеются усилители* вертикального отклонения луча (усилитель <У>) и горизонтального - усилитель <Х>. На входе усилителя <У> установлен аттенюатор (дели- тель), позволяющий ослаблять входной сигнал в заданное число раз.

*Для получения на экране ЭЛТ <изображения> периодического* электрического сигнала *Uc*(*t*) *необходимо выполнение двух условий.*

*1. Подаваемое на вертикально отклоняющие пластины напряжение*

*Uy должно линейно зависеть от самого сигнала Uc:*

*Uy*(*t*) = *U*0*y* + *kyuUc*(*t*)*. (11)*

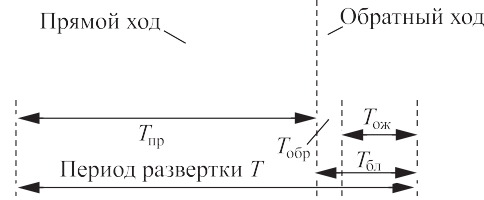
*Здесь U*0*y - постоянное напряжение, определяющее расположение гра-* фика сигнала по оси *Y на экране ЭЛТ, kyu - коэффициент преобразо-* вания входного сигнала каналом вертикального отклонения.

*2. Подаваемое на горизонтально отклоняющие пластины напряже-* ние *Ux должно линейно зависеть от времени t:*

*Ux* = *U*0*x* + *kxut. (12)*

*Здесь U*0*x - постоянное напряжение, определяющее расположение гра-* фика сигнала по оси *X на экране ЭЛТ, kxu - коэффициент пропорцио-* нальности, зависящий от рабочих характеристик генератора развертки и усилителя <Х>.

*Напряжение пилообразной формы, которое вырабатывает генера-* тор развертки осциллографа, называемое также напряжением разверт- ки, изображено на рис. 3. В течение прямого хода луча (*Tllр) напряже-* ние изменяется до максимального значения так, что луч с постоянной скоростью проходит весь экран слева направо. После завершения пря- мого хода луча начинается процесс обратного хода луча (*Tобр), когда*



*\_lис. 3. Напряжение развертки*

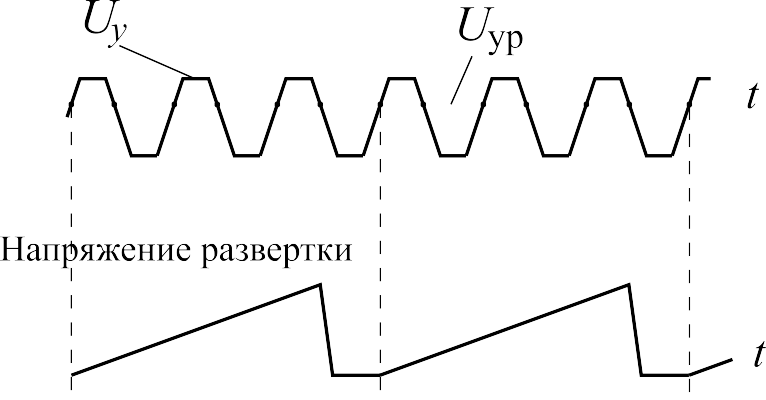
*напряжение развертки возвращается к первоначальному уровню, и луч* переходит в исходное положение в левый край экрана. Скорость изме- нения напряжения прямого хода развертки, т. е. масштаб по оси *X,* задается расположенным на передней панели осциллографа переклю- чателем <ВРЕМЯ/ДЕЛ>, проградуированным во времени, за которое луч проходит одно большое деление сетки экрана. Наличие интервала ожидания *Tож позволяет изменять масштаб по оси X независимо от* периода развертки.

*Во время <прямого> хода пилы на модулятор <электронной пушки>* подается положительное относительно катода напряжение, при этом на экране виден светящийся след электронного луча. Во время <об- ратного> хода пилы (т. е. на интервале блокировки *TбJ) напряжение* на модуляторе <запирает> трубку. В результате электронный луч на интервале блокировки не вызывает свечения экрана.

*Синхрuнизацин. При наблюдении периодических и особенно быст-* ропротекающих процессов важно получить на экране осциллографа неподвижное изображение сигнала. Для этого нужно, чтобы период развертки был кратен периоду изучаемого сигнала. Однако, как пра- вило, точное соотношение периодов соблюсти трудно из-за нестабиль- ности генератора развертки или самого изучаемого процесса. Поэтому используют принудительное согласование периодов, при котором изу- чаемое напряжение <навязывает> свой период генератору развертки. При этом начало прямого хода развертки должно совпадать строго с одной и той же характерной точкой исследуемого периодического сигнала. Процесс привязки начала развертки к характерным точкам сигнала называется синхронизацией развертки с сигналом. Этот спо- соб синхронизации поясняется осциллограммами, изображенными на рис. 4.

*Сигнал произвольной формы Uy (на рисунке - сигнал трапецие-*

*видной формы) сравнивается с пороговым напряжением UYр (уровнем* синхронизации), устанавливаемым ручкой <УРОВЕНЬ>. В момент пе-



*\_lис. 4. 11роцесс синхронизации генератора развертки*

*ресечения сигналом Uy уровня UYр снизу вверх запускается прямой* ход развертки (<пила>), при условии, что это произошло на интервале ожидания *Tож (рис. 3 и 4). Запуск <пилы> может производиться при* пересечении сигнала *Uy уровня UYр как снизу вверх (как на рис. 4), так* и сверху вниз в зависимости от выбранного положения переключате- ля режимов синхронизации развертки на передней панели осциллогра- фа (<ЗАПУСК +> или <ЗАПУСК >). Напряжение *UYр изменяется* при вращении ручки <УРОВЕНЬ> на передней панели осциллографа, что позволяет совместно с переключателем <ЗАПУСК +, > выбрать фазу сигнала в начале развертки, исходя из наилучшей устойчивости синхронизации и удобства наблюдения. Если *UYр не пересекает Uy, то* синхронизация невозможна.

−

−

*Генератор развертки может работать в автоматическом или жду-* щем режимах, выбираемых тумблером <АВТ/ЖДУЩ>. В автомати- ческом режиме время ожидания *Tож не может быть больше некоторо-* го максимального времени ожидания *Tож, m x. Если на максимальном* интервале ожидания не произошло пересечения *Uy и UYр, то происхо-* дит автоматический запуск прямого хода развертки в момент, не свя- занный с определенной фазой исследуемого сигнала, а пилообразный сигнал будет иметь период *Tll,ант, определяемый только внутренними* параметрами осциллографа. В этом случае изображение исследуемо- го сигнала на экране перемещается влево или вправо (<бежит>), а при отсутствии исследуемого сигнала видна горизонтальная линия разверт- ки.

*При пересечении Uy и UYр на интервале ожидания происходит за-* пуск прямого хода развертки в момент, связанный с определенной фа- зой исследуемого сигнала. На экране при этом наблюдается неподвиж- ное изображение сигнала.

*Синхронизация в автоматическом режиме возможна лишь в слу-* чае, когда собственный период генератора развертки больше периода исследуемого сигнала *Tll,ант > Tc. В противном случае за первым цик-* лом запуска сигнала развертки будет следовать один или несколько автоматических запусков прямого хода <пилы> в моменты времени, не привязанные к определенной фазе исследуемого сигнала, т. е. про- изойдет наложение друг на друга различных изображений сигнала.

*В ждущем режиме запуск прямого хода развертки происходит толь-* ко при наличии пересечения *Uy и UYр на интервале ожидания Tож, при-* чем интервал ожидания *Tож в этом режиме может быть сколь угодно* большим, а синхронизация осуществляется при любом периоде иссле- дуемого сигнала *Uc*(*t*)*. Наблюдение на экране малой части периода* процесса (например, фронта импульса или короткого импульса, дли- тельность которого много меньше периода следования импульсов) воз- можно только в ждущем режиме.

*Кроме синхронизации развертки исследуемым сигналом, преду-* смотрен режим синхронизации внешним сигналом (вместо *Uy), син-* хронным по отношению к исследуемому сигналу. Этот сигнал подает- ся на гнездо <ВНЕШ. ЗАП> на передней панели осциллографа. Пе- реключатель <ЗАПУСК> при этом должен находиться в положении

*<ВНЕШ>. Работа элементов схемы синхронизации и развертки в этом* случае аналогична описанной выше.

*Выбор диапазона (масштаба) развертки осуществляется переклю-* чателем <ВРЕМЯ/ДЕЛ>.

*Удобный для наблюдения на экране размер изображения по верти-* кали устанавливается переключателем <V/ДЕЛ>, проградуированным в величине напряжения, приводящего к перемещению луча по вертика- ли на одно большое деление (эта величина называется коэффициентом отклонения). Для смещения изображения по вертикали предусмотрен потенциометр < >, который изменяет постоянную составляющую *U*0*y* *(см. формулу (11)).*

t

*В процессе работы с осциллографом всегда следует учитывать* частотные характеристики каналов вертикального и горизонтально- го отклонения: амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазо- частотную характеристику (ФЧХ). Если на вход <У> осциллографа по- дается синусоидальное напряжение *Uy* = *U*0 sin(2*πft*) *амплитудой U*0 *и*

*частотой f, то для перемещения луча на экране ЭЛТ можно записать:*

*y* = *y*0(*f* ) sin(2*πft* + ∆Φ*y*(*f* ))*. Здесь y*0(*f* ) *- амплитуда перемещения* луча на частоте *f,* ∆Φ*y*(*f* ) *- разность между фазой колебаний пере-* мещения луча *y и фазой колебаний входного сигнала Uy на частоте f* *(сдвиг фаз).*

*Тогда АЧХ канала вертикального отклонения есть зависимость*

*Ky*(*f* ) =

*y*0(*f* )

*,*

*U*0

*а ФЧХ - зависимость* ∆Φ*y*(*f* )*. АЧХ и ФЧХ канала горизонтального* отклонения определяются аналогично.

*Как правило, АЧХ Ky*(*f* ) *остается практически постоянной Ky* =

= *Ky, m x в диапазоне частот от fmin до fm x и уменьшается на частотах* *f < fmin и f > fm x. Диапазон частот от fmin до fm x называется поло-* сой пропускания. Значения частот *fmin и fm x определяют из условий*

*Ky*(*fmin*)

*Ky, m x*

= *Ky* (*fm x*)

*Ky, m x*

1

##### = √2 ≃ 0*,*7*.*

*Непостоянство характеристик Ky*(*f* ) *и* ∆Φ(*f* ) *во всем диапазоне ча-* стот приводит, например, к искажению формы импульсного сигнала высокой частоты при его преобразовании в канале вертикального от- клонения осциллографа.

*Канал <У> может быть использован с открытым или закрытым вхо-* дом. В первом случае передается как переменная *U*∼*, так и постоянная* *U*= *составляющие сигнала, во втором - только переменная. При рабо-* те в режиме с закрытым входом постоянная составляющая сигнала

*задерживается включенным на входе разделительным конденсатором.* Путем переключения тумблера < */ > на передней панели осциллогра-* фа можно выбрать необходимый вход усилителя <У>. Канал горизон- тального отклонения имеет аналогичный усилитель <Х>.

∼ ≃

*При наблюдении зависимости Uy* = *F* (*Ux*) *сигнал Ux подается на за-* крытый вход < Х>. В учебном осциллографе размер изображения

→⊃

*по горизонтали не регулируется. Для смещения изображения по го-* ризонтали предусмотрен потенциометр <↔*>, изменяющий постоянную* составляющую *U*0*x (см. формулу (12)).*

*Фи'уры Лисса2Ку. При сложении двух взаимно перпендикулярных* колебаний с равными или кратными частотами, поданных на входы осциллографа, луч описывает на экране неподвижные замкнутые кри- вые, которые называются фигурами Лиссажу. При небольшом нару- шении кратности частот форма фигур медленно меняется, а при боль- шом - картина размывается.

*Пусть на горизонтально отклоняющие пластины ЭЛТ подается сиг-* нал *Ux* = *Ua* cos(2*πft*+*ϕ*1) *(при этом собственный генератор развертки* осциллографа должен быть, конечно, выключен), а на вертикально от- клоняющие пластины поступает смещенный по фазе сигнал той же частоты *Uy* = *Ub* cos(2*πft* + *ϕ*2)*, ϕ*1 l= *ϕ*2*.*

*При чувствительностях пластин kx и ky координаты x, y светяще-*

*гося пятна на экране будут определяться выражениями*

*x* = *A* cos(2*πft* + *ϕ*1)*, y* = *B* cos(2*πft* + *ϕ*2)*, A* = *kxUa, B* = *kyUb.*

*Исключив из этих уравнений время t, нетрудно получить уравнение* траектории движения луча:

*x*2 *y*2 *xy* 2

*A*2 + *B*2 − 2 *AB* cos(*ϕ*2 − *ϕ*1) = sin (*ϕ*2 − *ϕ*1)*.*

*Таким образом, фигура, которую описывает луч при сложении коле-* баний, имеющих одинаковую частоту, представляет собой эллипс. Ори- ентация этого эллипса зависит от разности фаз колебаний (*ϕ*2 *ϕ*1*).*

−

*В общем случае вид фигуры Лиссажу зависит от соотношений меж-*

*ду периодами (частотами), фазами и амплитудами складываемых ко-* лебаний. Некоторые частные случаи фигур Лиссажу для разных пе- риодов и фаз показаны на рис. 5. Зная параметры одного колебания, например *fx, можно по фигуре Лиссажу определить параметры дру-* гого колебания - *fy. На полученное изображение накладывают мыс-* ленно две линии - горизонтальную и вертикальную, не проходящие

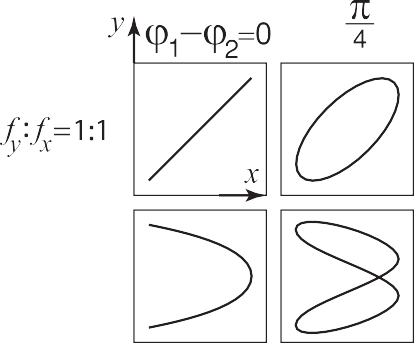
*через узлы фигуры. Фиксируют число пересечений с горизонтальной* линией *nx и вертикальной линией ny. Отношение частот fy/fx равно* отношению *nx/ny.*

*Если одно или оба колебания происходят не по гармоническому, а* по более сложному закону, то получаются траектории более сложной формы.

*КаJибратuр. Для проверки коэффициентов отклонения и разверт-* ки в осциллографе формируется внутренний калибровочный сигнал - прямоугольные импульсы напряжения с частотой повторения 50 Гц и фиксированной амплитудой. При поступлении этих импульсов на вход

*<У> (переключатель <V/ДЕЛ> - в положении К) отклонение луча по* оси *Y должно составлять 4,5-5,0 делений, а период колебаний - 20 мс* по оси *X.*



*\_lис. . Фигуры lиссажу для колебаний одинаковой амплитуды*

## *Пu,ц'uтuнка нрибuрuн*

*1. Проверьте соединение корпусов приборов установки с шиной общего* заземления. Тумблерами <СЕТЬ> включите питание осциллографа и генераторов и дайте приборам прогреться 3-5 мин.

*2. Поставьте в среднее положение следующие ручки (рис. 6): <Яркость>,*

*<Фокус>, регуляторы вертикального и горизонтального отклонения лу-* ча, ручку <УРОВЕНЬ>.

*3. Установите на осциллографе переключатель <ЗАПУСК> в положе-* ние <ВНУТР +>, а переключатель <АВТ/ЖДУЩ> - в положение

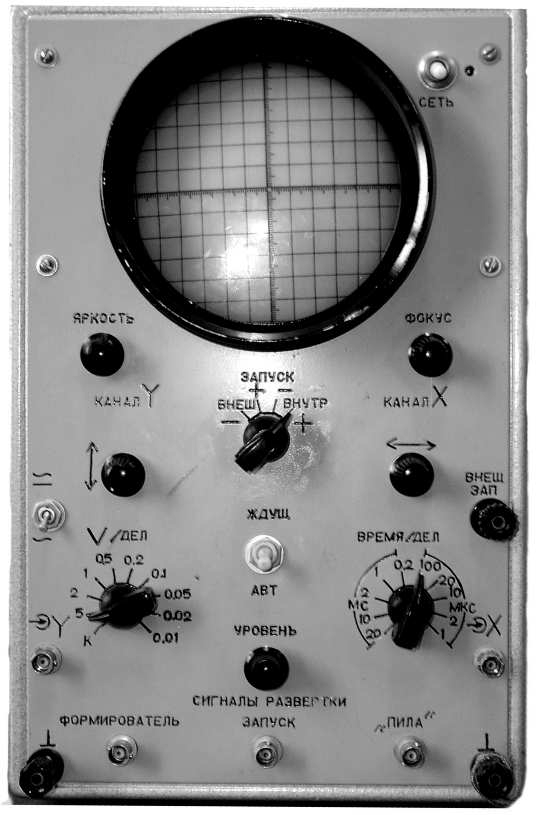
*<АВТ>). Переключатель <V/дел> следует поставить в положение ма-* лой чувствительности, например, 5 В/дел.

*4. Переключатель <ВРЕМЯ/ДЕЛ> - в положение 2 мс.*

*5. После включения осциллографа через 1-2 мин на экране должна по-* явиться горизонтальная линия развертки. Если линия не видна, то регуляторами отклонения луча добейтесь появления линии на экране. Регулировкой яркости и фокуса добейтесь наилучшего качества изоб- ражения.

## *ВНИМАНИЕ!*

*1. Яркость не следует увеличивать до уровня, при котором начинают* увеличиваться размеры изображения на экране.



*\_lис. 6. l:нешний вид осциллографа*

*2. Луч на экране ЭЛТ виден только в течение прямого хода разверт-* ки. В ждущем режиме при отсутствии пересечения *UYр и Uy (рис. 4)* на экране отсутствует какое-либо изображение. Поэтому при выпол- нении заданий целесообразно начинать работу в режиме <АВТ> при самой низкой чувствительности по входу <У>. При этом даже при от- сутствии сигнала будет видна горизонтальная линия развертки. Уве- личивая чувствительность переключателем <V/ДЕЛ>, устанавливают размах изображения от 2 до 6 делений. Ручкой <УРОВЕНЬ> добива- ются неподвижности изображения. Удобный масштаб изображения по оси *X выбирают переключателем <ВРЕМЯ/ДЕЛ>. Если это не удает-* ся, то повторяют попытку синхронизации в режиме <ЖДУЩ>.

*3. При необходимости отклонения электронного луча сигналом со входа*

*<Х> (для наблюдения зависимости Uy* = *F* (*Ux*)*) генератор развертки* выключается следующим образом:

* *в режиме <АВТ> установить начало развертки в центр экрана;*
* *перевести генератор развертки в ждущий режим (<ЖДУЩ>);*
* *ручку <УРОВЕНЬ> повернуть до упора, при этом изображение должно исчезнуть;*
* *увеличить ручкой <ЯРКОСТЬ> свечение экрана до необходимо- го уровня.*

*ЗАДАНИЕ*

## *1. НабJю,цение нериu,цическu'u си'наJа uт 'енератuра знукu-* нuй частuты ЗГ)

*1. Выясните, как изменяется изображение сигнала на экране при ра-* боте осциллографа в различных режимах синхронизации. Для это- го соедините кабелем вход <У> осциллографа с выходом ЗГ. По- ставьте на осциллографе соответствующие переключатели в положе- ния: <ЗАПУСК> - <ВНУТР +*>, тумблер <ЖДУЩ-АВТ> - <АВТ>,*

*<V/ДЕЛ> - 5, <ВРЕМЯ/ДЕЛ> - 2 мс. Подайте на вход <У> осцилло-*

*графа с выхода генератора синусоидальный сигнал частоты 100 Гц и* произвольной амплитуды (например, аттенюатор генератора - 0 дБ). На экране должна наблюдаться синусоида. Если синусоида <бежит>, добейтесь неподвижного изображения вращением ручки <УРОВЕНЬ>. Сместите синусоиду по горизонтали, чтобы на экране было видно на- чало синусоиды.

*2. Вращая ручку <УРОВЕНЬ>, проследите за изменением вида осцил-* лограммы. Проведя аналогичные наблюдения при режимах разверт- ки <АВТ>, <ЖДУЩ>, внутреннем запуске развертки <ВНУТР +> и

*<ВНУТР >, установите влияние положения органов управления си-*

−

*стемы синхронизации на вид осциллограммы.*

*3. Получите устойчивое изображение при трех произвольных положени-* ях органов управления ЗГ (например: 100 Гц, 0 дБ; 1000 Гц, 10 дБ; 3 105 *Гц, 30 дБ). Удобный для наблюдения размер изображения уста-* навливайте переключателями <ВРЕМЯ/ДЕЛ>, <V/ДЕЛ>.

·

*11. Измерение амнJиту,цы синусuи,цаJьнu'u си'наJа. Установите максимальную амплитуду на ЗГ. С помощью осцилло-*

*графа измерьте напряжение на генераторе Umax, при необходимости* переключая масштаб по оси *Y (<V/ДЕЛ>). Затем, установив ручку*

*генератора амплитуды в среднее и крайне левое положение измерьте* несколько значений амплитуды ЗГ и минимальное напряжение *Umin.*

*Выразите отношение максимальной и минимальной амплитуд ге-* нератора в децибеллах [дБ℄. Децибелл - логарифмическая единица ослабления или усиления сигнала, определяемая по формуле

*A*2 *A*

*β*[*дБ*] = 10 lg *A*2 = 20 lg *A*0 *,*

0

*где A - амплитуда сигнала, A*0 *- некоторая амплитуда, принимаемая* за базовую.

## *111. Измерение частuты синусuи,цаJьнu'u си'наJа*

*Установите размах синусоидального сигнала 6 делений, частоту ЗГ* *fз' в соответствии с таблицей 1. Получите устойчивое изображение.* Удобный масштаб изображения по горизонтали установите переключа- телем <ВРЕМЯ/ДЕЛ>. Измерьте период сигнала, рассчитайте частоту и результаты занесите в таблицу 1.

*Т а б л и ц а* *1*

## *Периu,ц и частuта синусuи,цаJьнu'u си'наJа*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *fз', Гц* | *ВРЕМЯ ДЕЛ* | *T , ДЕЛ* | *T ,*  *с* | *fизм, Гц* | |*fз'* − *fизм*|*, Гц* | |*fз'* − *fизм*|  *fизм* |
| 2 · 10 |  |  |  |  |  |  |
| 2  2 · 10 |  |  |  |  |  |  |
| *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* | *. . .* |
| 6  2 · 10 |  |  |  |  |  |  |

*1V. ПuJучение амнJиту,цнu частuтных характеристик АЧХ) усиJитеJей канаJuн <Х> и <У>*

*1. Подайте сигнал с ЗГ на вход <У> осциллографа. Переключатель*

*<V/ДЕЛ> установите в положение <1>. Установите размах изображе-*

*ния синусоидального сигнала* 2*A*0 = 6 *делений на частоте ЗГ fз'* =

= 103 *Гц. Получите устойчивое изображение. Изменяя частоту звуко-* вого генератора (при неизменном положении регулятора амплитуды ЗГ) во всем доступном диапазоне, измерьте размах сигнала 2*Ay (или* 2*Ax) в соответствии с таблицей 2 при открытом ( или DC) и закрытом* ( или АC) входе и рассчитайте значения коэффициента ослабления сигнала *K согласно*

∼

≃

*K*(*fз'*

) = 2*A*(*fз'*) *. (13)*

2*A*0

*Результаты занесите в таблицу 2.*

## *АЧХ усиJитеJей канаJuн*

*Т а б л и ц а* *2*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *fз', Гц* | *10* | *. . .* | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | *. . .* | 107 |
| 2*Ay, дел* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ky,* ≃ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2*Ay, дел* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Ky,* ∼ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2*Ax, дел* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *Kx* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*Необходимо определить те значения частоты, при которых коэф-* фициенты *Kx, Ky составляют примерно 0,7 от своих максимальных* значений. Эти значения принято считать границей полосы пропуска- ния усилителя.

*2. Выключите внутреннюю развертку по оси X. Для этого установи-* те органы управления осциллографа в следующие положения: <ЗА-

*ПУСК> - <ВНЕШ>, тумблер <ЖДУЩ-АВТ> - <ЖДУЩ>, <УРО-*

*ВЕНЬ> - до упора по часовой стрелке; <ЯРКОСТЬ> - максималь-* ная. Подайте сигнал с ЗГ на вход <Х> и установите размах сигнала

*6 делений на частоте ЗГ fз'* = 103 *Гц. Изображение должно иметь вид*

*отрезка горизонтальной прямой в центре экрана.*

*3. Проведите измерения размаха сигнала* 2*Ax и рассчитайте Kx*(*f* ) *ана-* логично *Ky*(*f* ) *и результаты занесите в таблицу 2.*

*4. Постройте графики Ky,* ≃(*f* )*, Ky,* ∼(*f* )*, Kx*(*f* ) *в единых координатах в* логарифмическом масштабе по частоте *f.*

## *V. ВJинние АЧХ на иска2Кение си'наJа.*

*Включите внутреннюю развертку осциллографа. Рассмотрите (ка-* чественно) влияние АЧХ канала <У> на искажения импульсного сиг- нала. Установите переключатель вида сигнала ЗГ в положение <⊓*>.*

*Размах сигнала на экране осциллографа установите 4 деления. Наблю-* дайте сигнал при открытом ( ) и закрытом ( ) входе на частотах

≃ ∼

*10 Гц,* 103 *Гц,* 2 105 *Гц,* 106 *Гц и зарисуйте полученные осциллограм-*

·

*мы.*

## *V1. Измерение разнuсти фазuных с,цни'uн си'наJuн на ныхu-*

*,цах усиJитеJей канаJа <У> и канаJа <Х> нри u,цнuнременнuй нu,цаче на их нхu,цы u,цнu'u и тu'u 2Ке си'наJа т. е. разнuсти фазuнu частuтных характеристик канаJuн <Х> и <У>*

*1. Выключите внутреннюю развертку так же,* как и в п. IV.2. Подайте сигнал частотой 104 *Гц с выхода ЗГ через тройник одновре-* менно на входы каналов <Х> и <У>. Уста- новите регулятором выхода ЗГ размах по оси *X - 6 делений, масштаб по оси Y -* 0,5 В/ДЕЛ. На экране должен наблюдать- ся отрезок прямой под углом в пределах

*30-*60◦ *к вертикали (вырожденный эллипс* с нулевой малой осью). При изменении ча-

*стоты сигнала прямая будет переходить в* эллипс.



*\_lис. 7. Фигура lиссажу при fx* = *fy и произвольной разности фаз* ∆Φ*xy*

*2. С помощью масштабной сетки измерьте по*

*изображению эллипса параметры A и B (рис. 7) во всем диапазоне* частот ЗГ, рассчитайте разность фаз ∆Φ*xy по формуле*

 ± arcsin *B , если эллипс наклонен вправо,*

*A*

∆Φ*xy* =

*как на рис. 7;*

 ±*π* ∓ arcsin *B , если эллипс наклонен влево.*

*A*

*Знак <*+*> или < > зависит от того, в какую сторону вращается точка,* описывающая эллипс, - по или против часовой стрелки. При увели- чении (уменьшении) частоты перемена знака (перемена направления вращения) происходит тогда, когда эллипс вырождается в отрезок пря- мой линии.

−

*Занесите данные в таблицу 3. Постройте график* ∆Φ*xy*(*f* ) *в лога-* рифмическом масштабе по частоте *fз'.*

*Т а б л и ц а* *3*

## *Занисимuсть разнuсти фаз* ∆Φ *uт частuты*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *fз', Гц* | *10* | *. . .* | *50* | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | *. . .* | 107 |
| *A, дел* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *B, дел* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ∆Φ*xy* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*V11. НабJю,цение фи'ур Лисса2Ку нри сJu2Кении кuJебаний нu нзаимнu нернен,цикуJнрных нанранJенинх*

*Выключите внутреннюю развертку осциллографа. Подайте на вход*

*<Х> осциллографа колебание с частотой fx от первого звукового гене-* ратора, а на вход <У> - колебание с частотой *fy от второго звукового* генератора. Амплитуды колебаний обоих генераторов и положение пе- реключателя <V/ДЕЛ> установите таким образом, чтобы фигура Лис- сажу занимала б,ольшую часть экрана. Установите частоту *fy, равную*

*1 кГц. Изменяя частоту fx, получите устойчивую фигуру для отноше-*

*ний частот fy/fx, равных 1:1, 2:1, 3:1 и 3:2. Зарисуйте полученные 4* осциллограммы и сравните их с приведенными на рис. 5.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.: Наука, 1983.*

*2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. - М.: Наука, 1996.*

*3. Калашников С.Г. Электричество. - М.: Наука, 1985.*

*4. Джонс М.Х. Электроника - практический курс. - М.: Постмаркет, 1999.*

*здл*

# *МЕХАНИКА ТВЕРДОгО ТЕЛА*

*Дни2Кение системы материаJьных тuчек. В классической механи- ке состоянид мдх ничдского звиждния материальной точки (частицы) в момент времени t определяется заданием ее радиуса-вектора -r и им- пульса -p* = *m-v. Эволюцию состояния во времени описывает ур внднид звиждния (второй закон Ньютона):*

*dp-* = *F-* (*-r, -p, t*)*. (2.1)*

*dt*

*Существенно при этом, что правая часть уравнения движения (сила)* зависит только от состояния частицы. Решая уравнение (2.1) с задан- ными начальными условиями, можем найти кон звиждния материаль- ной точки:

*-r* = *-r*(*t*)*.*

*Для системы материальных точек в силу линейности уравнения* движения получаем

�*n*

*d*

*p-i n*

*i*=1 = L *F- . (2.2)*

*i*=1

*dt*

*i*

*Здесь учитываются только внешние силы, так как силы, действующие* между материальными точками системы и называемые внутренними, в сумме для системы дают нуль.

*В любой системе материальных точек существует замечательная* геометрическая точка, называемая цднтром м сс или цднтром индрции. Радиус-вектор центра масс по определению равен

*mi-ri*

�*n*

*R-* = *i*=1 *.*

�*n*

*mi*

*i*=1

*Очевидно, что скорость центра масс есть*

*P-*

*-* �*n*

*где P* =

*i*=1

*-v* = *,*

*m*

�*n*

*n*

*p-i - полный импульс системы, m* =

*mi - ее масса.*

*i*=1

*В силу (2.2)*

*md-v* = L *F- .*

*i*=1

*Это означает, что центр масс движется как материальная точка, масса* которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила - геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Ско- рость центра масс можно рассматривать как скорость движения систе- мы частиц как целого.

*dt*

*i*

*Если внешние силы на систему не действуют, она называется изо-* лированной или замкнутой. В этом случае из (2.2) следует сохранение полного импульса системы материальных точек:

*n*

L

*p-i* = const*, (2.3)*

*i*=1

*т. е.*

*-v* = const*.*

*С такой системой частиц можно связать инерциальную систему от- счета, которую принято называть систдмой цднтр м сс или систдмой цднтр индрции.*

*В системе центра масс полный импульс системы равен нулю.*

*Для взаимодействия, в частности соударения, двух материальных* точек равенство суммы импульсов до соударения, отмеченных индек- сом <0>, и после соударения имеет вид

*p-*10 + *-p*20 = *p-*1 + *-p*2 *(2.4)*

*или*

*m*1*-v*10 + *m*2*-v*20 = *m*1*-v*1 + *m*2*-v*2*. (2.5)*

*Пусть материальная точка имеет импульс -p, а ее положение отно-* сительно некоторого произвольного начала отсчета *O определяется ра-*

*диусом-вектором -r. Тогда, по определению, момднт импульс L-*

*этой*

*материальной точки относительно точки O равен векторному произве-*

*дению*

*L-* = *-r* × *-p. (2.6)*

*Аналогично, если на эту материальную точку действует сила F- , то* момднтом силы относительно точки *O называется векторное произве-* дение

*M-* = *-r* × *F- . (2.7)*

*Умножая векторно слева уравнение (2.1) на -r и используя соотношение*

*p-* = *mdmr , находим*

*dt*

*dL-* dt

= *M- . (2.8)*

*Соотношение (2.7) можно представить в другом, наглядном виде, если* заметить, что

*M* = *rF* sin *θ* = *Fh,*

*где θ - угол между векторами -r и F- , а h* = *r* sin *θ - длина перпенди-* куляра, опущенного из точки *O на направление силы, это расстояние* принято называть плдчом силы относительно точки *O.*

*С другой стороны,*

*M-* = *-r* × *F-* = 1

1

*-i -j -k*

*x y z* =

*Fx Fy Fz* 1

= *-i*(*yFz* − *zFy*) + *-j*(*zFx* − *xFz*) + *-k*(*xFy* − *yFx*)*.*

*Здесь векторы -i, -j, -k - единичные векторы вдоль осей Ox, Oy, Oz. Вы-* берем систему координат таким образом, чтобы векторы *-r и F- лежали* в координатной плоскости (*x, y). Пусть, кроме того, ось Ox направлена* вдоль вектора *-r, тогда имеем*

*-r* = (*x,* 0*,* 0)*,*

*F-* = (*Fx, Fy,* 0)*,*

*т. е.*

*Mx* = 0*, My* = 0*, Mz* = *xFy* = *xF* sin *θ* = *Fh.*

*Поскольку перпендикуляр, опущенный из точки O на направление си-* лы *F- , ортогонален оси Oz, его длину h можем назвать также плечом*

*относительно Oz. В связи с этим проекции момента M-*

*на координат-*

*ные оси принято называть момднт ми силы относитдльно этих осдй.*

*Аналогичные рассуждения справедливы также и для момента импуль-* са *L- .*

*В случае произвольной системы координат представим векторы -r* *и F- в виде*

1

*-r* = *-r*⊥ + *-r*1*,*

*F-* = *F-*⊥ + *F- .*

*Здесь -r*⊥ *- составляющая вектора -r, перпендикулярная к оси Oz, а*

*-r*1 *- составляющая, параллельная этой оси. Аналогичный смысл име-* ют векторы *F-*⊥ *и F- . Можно показать, что*

1

*M-* 1 = *-r*⊥ × *F-*⊥*,*

*т. е.*

*Mz* = *r*⊥ · *F*⊥ sin *ϕ,*

*где ϕ - угол между векторами -r*⊥ *и F-*⊥*. Аналогично, для проекции* момента импульса *Lz имеем*

*Lz* = *r*⊥ · *p*⊥ sin *α,*

*где α - угол между векторами -r*⊥ *и p-*⊥*.*

*Для системы материальных точек полный момент импульса пред-*

*ставляет сумму моментов импульсов материальных точек, а полный* момент сил - сумму моментов только внешних сил, так как момен- ты сил взаимодействия между материальными точками, называемые внутренними, в сумме дают нуль. Поэтому

�*n*

*d*

*L- i* *n*

*i*=1 = *M-*

L

*dt i*=1

*i. (2.9)*

*Если система материальных точек изолированная (замкнутая), то* есть отсутствуют внешние силы, то полный момент сил равен нулю и сохраняется полный момент импульса системы:

*n*

L

*-ri* × *-pi* = const*. (2.10)*

*i*=1

*Отметим, что для векторных величин, какими являются импульс и* момент импульса, возможны случаи, когда полные векторы не сохраня- ются, но сохраняется какая-то их компонента. Например, в однородном поле тяжести сохраняются импульсы в направлениях, перпендикуляр- ных к полю, и моменты импульсов относительно осей, параллельных полю. В системе центральных сил сохраняется момент импульса отно- сительно центра сил.

*При перемещении материальной точки под действием силы на рас-* стояние *d-r совершается работа, величина которой находится с помо-* щью скалярного произведения силы на перемещение:

*dA* = *F-* · *d-r. (2.11)*

*Если сила изменяет импульс материальной точки в соответствии со* вторым законом Ньютона (2.1), то получаем

*dA* =

*dp-* dt

*d-r* = *-vdp-* =

1

*p- dp-* =

*m*

1 *p*2

*p dp* = *d .* m 2*m*

*Таким образом, совершение работы приводит к изменению величи-* ны, которую назвали кинетической энергией материальной точки:

*p*2

*K* = =

2*m*

*mv*2

##### 2

*. (2.12)*

*Консервативными называются силы, в поле которых работа по за-* мкнутому пути равна нулю, то есть работа силы по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от пути. Примером поля консерва- тивных сил является поле тяжести. В поле консервативных сил можно ввести потенциальную энергию *U. Работа сил поля равна по определе-* нию убыли потенциальной энергии:

*dU* = −*F- d-r. (2.13)*

*Используя второй закон Ньютона, получаем*

*dp-*

##### 1 1

*p*2

*т. е.*

*dU* = − *dt d-r* = −*-vdp-* = − *m p- dp-* = − *mpdp* = −*d* 2*m ,*

*d U* + *p*

2

2*m*

= 0*. (2.14)*

*Это соотношение выражает закон сохранения механической энергии.*

*Для системы материальных точек полная кинетическая энергия* равна сумме кинетических энергий точек. Для замкнутой системы то- чек, то есть при отсутствии внешних сил, полная кинетическая энергия системы может меняться (в отличие от импульса и момента импульса) за счет работы внутренних сил - сил взаимодействия между мате- риальными точками. Сохранение кинетической энергии будет только при упругом характере взаимодействия, при котором во время взаимо- действия кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругого сжатия, а затем полностью возвращается в кинетическую энергию материальных точек. В случае упругого взаимодействия двух материальных точек, импульсы которых до взаимодействия отмечены индексом <0>, закон сохранения кинетической энергии имеет вид

*p*2 *p*2 *p*2 *p*2

10 + 20 = 1 + 2

2*m*1 2*m*2 2*m*1 2*m*2

*или*

*m*1*v*2 *m*2*v*2 *m*1*v*2 *m*2*v*2

10 + 20 = 1 + 2 *. (2.15)*

##### 2 2 2 2

*Отметим, что использование этих соотношений в (2.4) и (2.5) поз-* воляет установить, что в системе центра масс импульс тел при соуда- рении изменяется только по направлению, но не по величине.

*Кинетическая энергия системы материальных точек в произволь-* ной системе координат равна сумме кинетической энергии в системе центра масс и кинетической энергии, которую имела бы вся масса си- стемы, движущаяся со скоростью центра масс.

*Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии, полу-* ченные выше из динамических уравнений, в действительности явля- ются общими свойствами замкнутых систем, следующими из однород- ности и изотропности пространства и однородности времени.

*Материальную точку, скорость которой сравнима со скоростью све-* та (*v c, c* = 3 1010 *см/с), принято называть рдлятивистской ч стицдй.* Опыт, накопленный при изучении ускорителей заряженных частиц, учит, что импульс релятивистской частицы

∼ ·

*p-* = ✓

*m-v*

*, (2.16)*

*v*2

1 − *c*2

*где m - масса частицы, -v - ее скорость. Уравнение движения (2.1)* сохраняет при этом свой вид. Можно показать, используя (2.1), что

*d*  *mc*2  *dA*

*dt* ✓ *v*2 = *dt ,*

1 − *c*2

*где dA* = *F- d-r - элементарная работа. Поскольку кинетическую энер-* гию *K частицы можно определить как работу силы по ускорению ча-* стицы от нулевой начальной скорости до некоторой заданной скорости *v, находим*

·

2

*K* = ✓

*mc*2

*v*2

− *mc . (2.17)*

*Так как*

1 − *c*2

*v*2 −1*/*2

1 − *c*2

= 1 + 2 *c*2 + *. . . ,*

1. *v*2

*выражение (2.17) при v* ≪ *c дает*

*K* =

*что и следовало ожидать.*

*mv*2

*,*

##### 2

*Опыт, основанный на изучении взаимодействия релятивистских ча-* стиц, показывает, что энергия свободной частицы не обращается в нуль при *v* = 0*, а остается конечной величиной, равной mc*2*. Это означает,* что энергией частицы следует считать величину

E = *K* + *mc ,*

2

*т. е.*

*mc*2

#### E = ✓

*. (2.18)*

*v*2

1 − *c*2

*Величина mc*2 *называется энергией покоя частицы. Сравнивая* (2.16) и (2.18), можно видеть, что импульс частицы

*p-* = E *-v. (2.19)*

*c*2

*При v* = *c импульс и энергия частицы, имеющей массу, обращаются в* бесконечность. Это означает, что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущи- еся со скоростью света (таковы в реальности световые кванты-фотоны, а также нейтрино). Для таких частиц из (2.19) имеем

*p* = E *. (2.20)*

*c*

*Всюду выше мы говорили о <частице>, но ее <элементарность> ни-* где не использовалась. В силу этого формулы (2.16), (2.18) и (2.19) применимы в равной степени и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц. Под *m следует при этом понимать полную массу* тела, а под *v - скорость его движения как целого.*

*Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергии покоя*

*частиц, входящих в его состав, также их кинетическую энергию, и энер-* гию взаимодействия частиц друг с другом. Другими словами,

L

*mc*2 l= *mi* · *c*2*,*

*i*

*где mi - масса i-й частицы.*

*Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон* сохранения массы, а выполняется только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

*Возводя в квадрат соотношения (2.16) и (2.18), можно убедиться в* том, что

2

2

*т. е.*

E − (*pc*)

= *m*2*c*4*, (2.21)*

E = (*mc*2)2 + (*pc*)2*. (2.22)*

*Соотношение (2.21) часто называют основным киндм тичдским тожзд- ством релятивистской механики.*

*Отметим, что частицу, для которой*

*p* ≫ *mc,*

*принято называть ультрарелятивистской. Для нее приближенно спра-* ведлива формула (2.20).

*При решении задач о столкновениях релятивистских частиц основ-* ное кинематическое тождество полезно записать в другом виде:

2

!

*i*

L*i* E

− L*i*

2

!

*p-ic*

= *invariant. (2.23)*

*Слово <invariant> свидетельствует о том, что правая часть (2.23) не* изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой.

*Дни2Кение тнёр,цu'u теJа. Одной из важнейших идеализаций меха- ники является понятие бсолютно твёрзого тдл . Абсолютно твёрдым телом называется система материальных точек, расстояния между ко- торыми остаются постоянными в процессе движения.*

*Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг некоторой оси. В этом* случае все точки тела движутся по окружностям, центры которых ле- жат на одной прямой, называемой осью вращения. Следует отметить, что ось вращения может находиться как внутри, так и вне тела. За- фиксируем на оси вращения произвольную точку *O. Тогда положение*

*какой-либо точки A твёрдого тела можно характеризовать радиусом-* вектором *O*−−→*A* = *-r. Если за время dt тело повернулось на угол dϕ, то*

*перемещение точки A за это время равно*

|*d-r*| = *r*⊥ · *dϕ, (2.24)*

*где r*⊥ *- расстояние от точки A до оси вращения.*

*Изменение угла, деленное на время dt, за которое оно происходит,* называется угловой скоростью и обычно обозначается *ω. Так как сме-* щение *dl* = *rdϕ за это же время равно vdt, получаем*

*v* = *ω* · *r. (2.25)*

*Это соотношение можно записать в векторном виде, если ввести век-* тор *ϕ- угла поворота и вектор -ω угловой скорости. Эти векторы так же,* как вектор момента силы и вектор момента импульса, введенные ранее, не совсем обычные. В отличие от обычных векторов (радиуса, скоро- сти, силы), которые называются полярными, эти векторы при переходе от правой системы координат (ось *z направлена по движению правого* винта при вращении его от *x к y) к левой изменяют свое направление* на противоположное. Такие векторы называются аксиальными. При использовании одной и той же системы координат (обычно правой)

*мы будем обращаться с этими векторами так же, как с обычными.* В векторном виде соотношение (2.25) выглядит следующим образом:

*-v* = *ω-* × *-r. (2.26)*

*Из этого уравнения видно, как при вращении направлена угловая ско-* рость и соответственно угол поворота, который связан с ней соотноше- нием

*-ω* =

*dϕ-*

*dt*

*. (2.27)*

*Любое тело можно рассматривать как систему из n частиц (в том*

*числе и при n ). В таком случае моменты сил и импульсов находят* с помощью суммирования:

→ ∞

*n*

L

*M-* = *-ri* × *F-i, (2.28)*

*i*=1

*n*

L

*L-* = *-ri* × *mi-vi. (2.29)*

*i*=1

*Как отмечалось выше, система материальных точек, расстояние* между которыми в процессе движения не изменяется, называется твдр- зым тдлом. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси *Oz. Для всех точек твердого тела вектор угловой скорости -ω при* этом одинаков и направлен вдоль этой оси. Скорость произвольной точки

*v-i* = *-ω* × *-ri,*

*где -ri - радиус-вектор этой точки относительно начала отсчета O.* Каждая материальная точка тела движется по окружности, радиус которой равен *ri*⊥*. Это означает, что векторы -ri*⊥ *и -vi*⊥ *взаимно пер-* пендикулярны, т. е. момент импульса *i-й частицы*

*Li*⊥ = *miri*⊥*vi*⊥ = *mir*2 *ω.*

*i*⊥

*Для полного момента импульса тела имеем*

*n*

*Lz* = L *mir*

2 *ω* = *Izω.*

*i*⊥

*i*=1

*Здесь введена характеристика инерционности твердого тела при* вращении - момднт индрции относитдльно оси (в данном случае от- носительно оси *z), который определяется не только массой, но и рас-* пределением массы относительно оси вращения:

*n*

*Iz* = L *mir*

2 *. (2.30)*

*i*⊥

*i*=1

*Момент инерции I относительно произвольной оси можно выразить* через момент инерции *I*0 *относительно параллельной ей оси, проходя-* щей через центр масс тела, массу тела *m и расстояние между осями* *a*0*:*

*I* = *I*0 + *ma*2*. (2.31)*

0

*Это соотношение составляет содержание так называемой теоремы Гюй-* генса-Штейнера.

*В формуле (2.30) расстояние mi от оси можно выразить через ее*

*координаты r*2 = *x*2 + *y*2*. Аналогичные формулы можно написать*

*i*⊥ *i* *i*

*для моментов инерции относительно осей x и y:*

*n n n*

*Ix* = L *mi*(*y*2+*z*2)*, Iy* = L *mi*(*z*2+*x*2)*, Iz* = L *mi*(*x*2+*y*2)*. (2.32)*

*i*=1

*i*=1

*i*=1

*i*

*i*

*i*

*i*

*i*

*i*

*Складывая моменты инерции и учитывая, что квадрат расстояния до*

*mi от начала координат r*2 = *x*2 + *y*2 + *z*2*, получаем полезное соотно-*

*шение:*

*i i i* *i*

*n*

*Ix* + *Iy* + *Iz* = 2 L *mir*2 = 2*I*⊙*. (2.33)*

*i*=1

*i*

*Здесь введен момднт индрции относитдльно точки I*⊙*.*

*Соотношение (2.33) оказывается очень полезным при вычислении* моментов инерции тел. Так, поместив начало координат в центр тонкой сферической оболочки радиуса *R, получим*

*I* = *I*

2

= *I* = *I*

= 2 *mR*2*. (2.34)*

*x y z*

##### 3 ⊙ 3

*Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг закреп-* ленной оси *Oz имеет вид*

*dω*

*Iz dt* = *Mz. (2.35)*

*Сравнивая это уравнение со вторым законом Ньютона (2.1), видим, что* роль силы играет момент сил, ускорения - угловое ускорение, а мас- сы - момент инерции, который, повторим еще раз, зависит от массы и ее распределения относительно оси вращения. Аналогичное соответ- ствие получаем и в выражении для кинетической энергии *K:*

*n n* 2

*K* = 1 L *m v*2 = 1 L *m r*2 *ω*2 = 1 *I ω*2 = *Lz . (2.36)*

*i*=1

*i*=1

2

*i*

*i*

2

*i i*⊥

*z*

2

*z*

*z*

2*Iz*

*Добавим еще, что роль смещения при вычислении работы играет* угол поворота. В простейшем случае, когда сила направлена по ка- сательной к окружности, по которой движется материальная точка, получаем

*dA* = *F dr* = *Fr dϕ* = *M dϕ. (2.37)*

*Для перехода от тела из точечных масс к однородному сплошно-* му в уравнении (2.30) надо перейти к бесконечно малым элементам и провести интегрирование по всей массе тела:

*Iz* = *r*2 *dm. (2.38)*

⊥

*Вектuры и тензuры. Многие задачи физики приводят к понятию тен-* зора, которое является обобщением понятия вектора. На вопрос о том, что такое вектор, обычно отвечают, что это упорядоченная тройка чи- сел. Можно видеть, однако, что не всякая упорядоченная тройка чисел образует вектор. Например, давление, объём и температура некоторой

*массы газа (P, V , T ) образуют упорядоченную тройку чисел, которая,* однако, не является вектором. С другой стороны, тройка чисел (*x, y,* *z), где x, y, z - координаты точки в некоторой декартовой системе*

*y*

*y*′

*y*

*A*

*A*

*x*′

′ ′

*-rA*

*y*

*x*

*A A*

*ϕ*

*ϕ*

*O xA* *x*

*\_lис. 2.2. 11оворот системы координат*

*координат, образует вектор, который называется радиусом-вектором.* В чём дело?

*Понятие вектора - это абстракция, родившаяся на основе опыта по* изучению перемещения реальных тел. Опыт учит, что перемещения ма- териальной точки (направленные отрезки) складываются по правилу параллелограмма или треугольника (см. рис. 2.1):

*-r*13 = *-r*12 + *-r*23*.*

*2*

*rr*12

*rr*23

*1*

*rr*13

*3*

*\_lис. 2.1. Cложение векторов:*

*r*13 = *r*12 + *r*23

*В этом заключается одно из самых яр-* ких свойств вектора, которое не зависит от выбора системы координат. Однако опреде- ление радиуса-вектора как тройки чисел (*x,*

*y, z) зависит от выбора системы координат.*

*На самом деле это определение можно сде-*

*лать инвариантным, указав, как преобразу-* ются координаты точки при переходе от од- ной системы координат к другой.

*Пусть, например, система координат по-*

*вёрнута вокруг оси z на угол ϕ (см. рис. 2.2).*

*Координаты точки A преобразуются по закону:*

′ = *xA* cos *ϕ* + *yA* sin *ϕ,*

*x*

*A*

′ = *xA* sin *ϕ* + *yA* cos *ϕ,*

*y*

*A*

−

′ = *zA.*

*z*

*A*

*Эти соотношения определяют закон преобразования компонент ради-*

*уса-вектора, поскольку -rA* (*xA, yA, zA*)*. Опыт учит, что по такому* же закону преобразуются компоненты любого вектора. Например, для вектора силы *F-* ≡ (*Fx, Fy, Fz*) *имеем:*

≡

′ = *Fx* cos *ϕ* + *Fy* sin *ϕ,*

*F*

*x*

′ = *Fx* sin *ϕ* + *Fy* cos *ϕ,*

*F*

*y*

−

′ = *Fz.*

*F*

*z*

*Таким образом, закон преобразования компонент радиуса-вектора* определяет критерий вектора любой природы. Тройка чисел (*P, V ,* *T ) не удовлетворяет этому критерию, так как она не меняется при* преобразовании координат.

*Дадим определение вектора в более общем виде. Пусть имеются две*

*системы координат Ox*1*x*2*x*3 *и Ox*′ *x*′ *x*′

*с общим началом O. Вектором*

1 2 3

*A- называется упорядоченная тройка чисел (A*1*, A*2*, A*3*), которая при*

*повороте системы координат преобразуется как тройка координат (x*1*,*

*x*2*, x*3*) радиуса-вектора некоторой точки, т. е. по закону*

3

*A* = L *αikAk, i* = 1*,* 2*,* 3*, (2.39)*

′

*i*

*k*=1

*где через αik обозначен косинус угла между осями Ox*′ *и Oxk.*

*i*

*Напрашивается естественное обобщение. Назовем тдн ором второ-* го р нг тройку векторов (*T-*1*, T-*2*, T-*3*), которая при повороте системы* координат преобразуется по такому же закону, т. е.

3

*T* = L *αikTk, i* = 1*,* 2*,* 3*. (2.40)*

*-* ′ *-*

*i*

*k*=1

*Векторы T-*1*, T-*2*, T-*3 *могут быть названы сост вляющими тдн ор T по*

*осям Ox*1*, Ox*2*, Ox*3*, а векторы T-* ′ *, T-* ′ *, T-* ′ *соответственно - составляю-*

1 2 3

*щими по осям Ox*′ *, Ox*′ *, Ox*′ *.*

1 2 3

*Очевидно, что*

*T-*1 = *-iT*11 + *-jT*12 + *-kT*13*, T-*2 = *-iT*21 + *-jT*22 + *-kT*23*, T-*3 = *-iT*31 + *-jT*32 + *-kT*33*,*

*(2.41)*

*где -i, -j, -k - единичные орты системы координат. Таким образом, тен-* зору *T может быть поставлена в соответствие матрица Tik, элементы* которой называются компонднт ми тдн ор .

*де:*

*Систему уравнений (2.41) можно записать в более компактном ви-*

*T-k* = *-elTkl, k* = 1*,* 2*,* 3*, (2.42)*

L

*l*

*где -e*1 = *-i, -e*2 = *-j, -e*3 = *-k. Аналогично,*

*T-* ′ = L *-e*′ *T* ′

*i*

*m*

*im*

*m*

*, i* = 1*,* 2*,* 3*, (2.43)*

*где -e*′ = *-i*′*, -e*′ = *-j*′*, -e*′ = *-k*′*. Подставляя (2.42) и (2.43) в (2.40), находим*

1 2 3

′ ′

L *-e*

*T*

*m im*

*m*

= *αik -el Tkl. (2.44)*

*k,l*

L

*Умножая (2.44) скалярно на -e*′ *, находим закон преобразования компо-*

*n*

*нент тензора:*

L

′ = *αik αnl Tkl. (2.45)*

*T*

*in*

*k,l*

*Здесь учтено, что* (*-e*′ *, -el*) = *αnl,* (*-e*′ *, -e*′ ) = *δmn, где δmn - единичная*

*n m n*

*матрица, т. е.*

*mn*

*A*

*rr*⊥

*rr*

*rs rr*

*δ* = 1*, если m* = *n,*

0*, если m* l= *n.*

*Соотношение (2.45) определяет закон преоб-* разования компонент тензора второго ранга при вращении системы координат. Можно видеть, что векторы разумно считать тензо-



*dm рами первого ранга, скаляры - тензорами*

*нулевого ранга. Компоненты тензора тре-* тьего ранга преобразуются по закону

′

*T*

*O*

*ikl*

= *αim αkn αlp Tmnp.*

*m,n,p*

L

*\_lис. 2.3. l:ычисление момента инерции тела относительно произвольной оси*

*В качестве примера рассмотрим тензор* инерции твердого тела. Вычислим момент инерции *I твердого тела относительно про-* извольной оси *OA, проходящей через нача-* ло координат *O (рис. 2.3).*

*Разложим радиус-вектор -r элемента массы тела dm на составляю-*

*щие вдоль оси OA и перпендикулярно к ней:*

*-r* = *-r*1 + *-r*⊥*.*

*По определению момента инерции*

*I* = *r*2 *dm* = (*r*2 − *r*2)*dm.*

⊥

1

*Если -s - единичный вектор вдоль оси OA, то*

*r*1 = (*-r,-s*) = *x*1*s*1 + *x*2*s*2 + *x*3*s*3*.*

*Кроме того,*

*r*2 = *x*2 + *x*2 + *x*2*, s*2 + *s*2 + *s*2 = 1*.*

1 2 3 1 2 3

*Учитывая эти соотношения, находим*

*I* = *I*11*s*2 + *I*22*s*2 + *I*33*s*2 + 2*I*12*s*1*s*2 + 2*I*23*s*2*s*3 + 2*I*31*s*3*s*1*, (2.46)*

1 2 3

*где*

*I*11 = /(*x*2 + *x*2)*dm,*

*I*12 = *I*21 = − / *x*1*x*2 *dm,*

*I*22 = /(*x*2 + *x*2)*dm, I*23 = *I*32 = − / *x*2*x*3 *dm,*

2

3

3

1

*(2.47)*

*I*33 = /(*x*2 + *x*2)*dm, I*31 = *I*13 = − / *x*3*x*1 *dm.*

1

2

*Формула (2.46) показывает, как зависит момент инерции относи-* тельно рассматриваемой оси *OA от направляющих косинусов оси. Она* допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Будем прово- дить через начало координат *O пря*√*мые во всех направлениях и от-*

*кладывать на них отрезки длиной* 1*/ I. Геометрическое место концов*

*отрезков образует некоторую поверхность. Определим уравнение этой*

*поверхности. Радиус-вектор текущей точки этой поверхности*

*-s*

*-r* = √*I ,*

*т. е.*

√

*si* = *xi I, i* = 1*,* 2*,* 3*. (2.48)*

*Подставляя (2.48) в (2.46), находим*

*I*11*x*2 + *I*22*x*2 + *I*33*x*2 + 2*I*12*x*1*x*2 + 2*I*23*x*2*x*3 + 2*I*31*x*3*x*1 = 1*. (2.49)*

1 2 3

*Полученная поверхность второго порядка является эллипсоидом, по-* скольку она не имеет бесконечно удаленных точек (*I* = 0*). Этот эллип-* соид называется эллипсоизом индрции тела, построенным относительно

l

*точки O. Эллипсоид инерции изменяется при изменении точки, отно-* сительно которой он строится. Цднтр льным эллипсоизом индрции на- зывается эллипсоид инерции, построенный относительно центра масс. Можно показать, что момент инерции твердого тела обладает всеми атрибутами тензора второго ранга: ему поставлена в соответствие мат- рица *Iik, его векторные составляющие суть*

*I-*1 = *-e*1*I*11 + *-e*2*I*12 + *-e*3*I*13*,*

*I-*2 = *-e*1*I*21 + *-e*2*I*22 + *-e*3*I*23*,*

*I-*3 = *-e*1*I*31 + *-e*2*I*32 + *-e*3*I*33*.*

*(2.50)*

*Из алгебры известно, что уравнение (2.49) может быть приведено* к главным осям *Ox, Oy, Oz:*

*Ixx*2 + *Iyy*2 + *Izz*2 = 1*. (2.51)*

*Начало отсчета O системы координат обычно помещают в центре масс* (но необязательно). Величины *Ix, Iy, Iz называются гл вными момдн-* т ми индрции тела. Векторные составляющие тензора по главным осям *Ox, Oy, Oz имеют вид*

*I-x* = *-iIx,*

*I-y* = *-jIy,*

*I-z* = *-kIz. (2.52)*

*Если известны направляющие косинусы рассматриваемой оси отно-* сительно главных осей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *sx* = cos *α,* | *sy* = cos *β,* | *sz* = cos *γ,* |
| *то поскольку*  *Ixy* = 0*,* | *Iyz* = 0*,* | *Izx* = 0*,* |
| *в силу (2.46) имеем* |  |  |

*I* = *Ix* cos2 *α* + *Iy* cos2 *β* + *Iz* cos2 *γ. (2.53)*

*Если, наоборот, известны моменты инерции I*1*, I*2*, I*3 *относительно* трех произвольных осей, то, решая систему линейных уравнений

*I*1 = *Ix* cos2 *α*1 + *Iy* cos2 *β*1 + *Iz* cos2 *γ*1*,*

*I*2 = *Ix* cos2 *α*2 + *Iy* cos2 *β*2 + *Iz* cos2 *γ*2*, I*3 = *Ix* cos2 *α*3 + *Iy* cos2 *β*3 + *Iz* cos2 *γ*3*,*

*(2.54)*

*можно вычислить главные моменты инерции Ix, Iy, Iz.*

*Направления главных осей тела можно определить из соображений* симметрии. Главные оси однородного прямоугольного параллелепипе- да параллельны его ребрам. Если тело обладает осевой симметрией, его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. К телам та- кого рода относится, например, цилиндрическое тело. В этом случае моменты инерции тела относительно всех осей, перпендикулярных к оси симметрии, одинаковы. Одной из главных осей тела является его ось симметрии. Всякая прямая, перпендикулярная к ней, также явля- ется главной осью тела. Для шарообразного тела любая ось является главной.

*Рассмотрим для примера однородное твердое тело, имеющее форму* прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого равны *a, b и* *c (рис. 3 на с. 157).*

*Поместим начало отсчета O системы координат Oxyz в центр масс*

*тела. Нетрудно вычислить главные моменты инерции тела:*

*I* = *m* (*b*2 + *c*2)*, I*

= *m* (*a*2 + *c*2)*,* *I*

= *m* (*a*2 + *b*2)*.*

*x* 12

*y* 12

*z* 12

*Определим момент инерции тела относительно диагонали OO*′*. Вос-*

*пользуемся для этого формулой (2.53). Можно видеть, что направляю-* щие косинусы оси *OO*′ *равны*

*a b c*

cos *α* = √*a*2 + *b*2 + *c*2 *,* cos *β* = √*a*2 + *b*2 + *c*2 *,* cos *γ* = √*a*2 + *b*2 + *c*2 *.*

*Таким образом, искомый момент инерции есть*

*Id* =

*Для кубического тела*

*m a*2*b*2 + *a*2*c*2 + *b*2*c*2

6 · *a*2 + *b*2 + *c*2 *. (2.55)*

*Ix* =

*ma*2

6 *, Iy* =

*ma*2

6 *, Iz* =

*ma*2

6 *, Id* =

*ma*2

*.*

##### 6

*Последнее понятно, поскольку эллипсоид инерции кубического тела -* сферическая поверхность.

*Обратим внимание на то, что момент импульса L- твердого тела мо-*

*жет быть представлен в виде скалярного произведения тензора инер-* ции *I на вектор -ω угловой скорости справа:*

*L*1 = *I*11*ω*1 + *I*12*ω*2 + *I*13*ω*3*, L*2 = *I*21*ω*1 + *I*22*ω*2 + *I*23*ω*3*, L*3 = *I*31*ω*1 + *I*32*ω*2 + *I*33*ω*3*.*

*(2.56)*

*В главных осях имеем*

*Lx* = *Ixωx, Ly* = *Iyωy, Lz* = *Izωz. (2.57)*

*Мы видим, таким образом, что понятие тензора наряду с понятием* вектора является плодотворным.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. Гл. I3V, VII.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. 1. Гл. 137, 10.*

## *Рабuта 1.2.1*

### *Определение скорости полета пули при* помощи баллистического маятника

*Цель работы: определить скорость полета пули, применяя законы сохранения и используя баллистические маятники.*

*В работе используются: духовое ружье на штативе, осветитель, оптическая система для измерения отклонений маятника, измери- тельная линейка, пули и весы для их взвешивания, а также балли- стические маятники.*

*Скорость вылета пули из духового ружья 150-200 м/с, из боевой* винтовки 1000 м/с.

∼

*Это скорости большие по сравнению, скажем, со скоростью пеше-* хода ( 2 м/с) или даже автомобиля ( 20 м/с). Поскольку размер ла- бораторной установки обычно порядка нескольких метров, время про-

∼ ∼

*лета пули составляет величину порядка 10*−2*-10*−3 *с. Для измерения* таких величин необходима дорогостоящая аппаратура, регистрирую-

*щая быстропеременные процессы. Дешевле определить скорость пули* по импульсу, передаваемому ею некоторому телу при неупругом со- ударении. В отсутствие внешних сил, а при кратковременном ударе даже и при действии внешних сил, импульс системы пуля-тело сохра- няется. Если масса тела значительно больше массы пули, то скорость тела с застрявшей в нем пулей будет значительно меньше скорости пу- ли, и ее легче измерить. Длительность неупругого соударения пули и тела, измеряемая с момента их соприкосновения до прекращения отно- сительного движения, зависит от сопротивления, которое испытывает

*пуля при движении внутри тела. Оценить ее можно по глубине про-* никновения пули в тело, предполагая силу сопротивления постоянной. Если при скорости 200 м/с глубина проникновения 1 см, то время

∼

*соударения* 10−4 *с. За это время даже тело только в 100 раз более* тяжелое, чем пуля, сдвинется всего на 0,1 мм. При малых временах

∼

*соударения внешние силы конечной величины сообщают импульс, на-* много меньший импульса пули.

*Для измерения переданного пулей импульса и, следовательно, ее* скорости используют баллистический маятник. Баллистическим назы- вается маятник, колебания которого вызываются кратковременным на- чальным импульсом (толчком). Кратковременным можно считать им- пульс, если время действия сил (время соударения) значительно мень- ше периода колебаний маятника. При этом отклонение маятника за время соударения значительно меньше амплитуды колебаний - мак- симального отклонения маятника. В случае гармонических колебаний время соударения *τ, отнесенное к периоду колебаний T , и отклонение*

∆*ϕ за время соударения, отнесенное к максимальному отклонению ϕm*

*(амплитуде), связаны простым соотношением*

∆*ϕ ϕm* ≈

2*πτ*

*.*

*T*

*В результате если время соударения составляет 0,01 периода, то откло-* нение равно 0,06 максимального отклонения.

*Связь между максимальным отклонением маятника и начальной* скоростью, полученной им в результате толчка, описывается законом сохранения механической энергии, если потери энергии за период зна- чительно меньше энергии его колебаний. В дальнейшем будем считать затухание малым, если за десять колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем наполовину. По начальному максимальному отклонению маятника определяются импульс и скорость пули.

*При проведении эксперимента необходимо позаботиться о том, что-* бы после удара пули колебания маятника происходили в одной плос- кости и отсутствовали поперечные движения. Достигается это соответ- ствующей установкой ружья. При этом надо иметь в виду, что вслед за пулей из ружья выходит воздушная струя, которая может оказать влияние на движение маятника и исказить результаты опыта. Поэтому ружье должно располагаться на расстоянии, достаточном для растека- ния струи. Влияние струи газов на маятник можно оценить с помощью холостого выстрела.

*Ружье закреплено на специальном штативе. Чтобы зарядить ру-*

*жье, надо освободить стопорный винт штатива и наклонить ружье в*



*\_lис. 1. Cхема установки для измерения скорости полета пули*

*держателе набок. Затем отогнуть ствол в сторону курка до упора. За-* рядив ружье, все вернуть в первоначальное состояние.

### *1. Метод баллистического маятника, совершающего* поступательное движение

*Используемый в этой части работы баллистический маятник пред-* ставляет собой тяжелый цилиндр, подвешенный на четырех нитях оди- наковой длины. Он изображен на рис. 1 вместе с измерительной си- стемой. Любая точка цилиндра при колебаниях маятника движется по дуге окружности, радиус которой равен расстоянию по вертикали меж- ду уровнями верхнего и нижнего концов нитей подвеса. Это поясняет- ся на рис. 2 (вид сбоку, в плоскости колебаний). Все точки цилиндра движутся по дугам окружностей одинакового радиуса относительно соответствующих каждой точке центров, в частности, центр масс *M*0

*переходит в M*1 *по дуге окружности с центром в точке O. Все радиусы*

*одинаковы и обозначены L.*

*Выше уже говорилось о требованиях к установке ружья. В данном* случае его необходимо установить таким образом, чтобы скорость пу- ли перед ударом была направлена горизонтально вдоль оси цилиндра (по крайней мере, достаточно близко к этому). Внешними силами для



*\_lис. 2. Cхема установки для измерения скорости полета пули*

*системы пуля-цилиндр являются сила тяжести, которая не имеет го-* ризонтальной компоненты, и силы натяжения нитей, у которых появля- ются горизонтальные компоненты при отклонении маятника. Однако если отклонения малы, то и эти компоненты малы. Тем более мал по сравнению с импульсом пули их импульс за время соударения. Поэтому закон сохранения импульса при соударении пули с цилиндром имеет вид

*mu* = (*M* + *m*)*V. (1)*

*Здесь m - масса пули, M - масса цилиндра, u - скорость пули перед* ударом, *V - скорость цилиндра и пули после неупругого соударения.* Учитывая, что масса маятника значительно больше массы пули,

*можно написать*

*M*

*u* = *V. (2)*

*m*

*Получив начальную кинетическую энергию, маятник при отклоне-* нии будет подниматься до тех пор, пока всю ее не израсходует. Если пренебречь потерями, то вся кинетическая энергия переходит в потен- циальную в поле тяжести. Тогда по закону сохранения механической

*энергии высота h подъема маятника над его начальным положением* связана с начальной скоростью маятника *V следующим образом:*

*V* 2 = 2*gh. (3)*

*Здесь g - ускорение свободного падения.*

*Высота подъема маятника выражается через угол ϕ отклонения* маятника от вертикали:

*h* = *L*(1 − cos *ϕ*) = 2*L* sin2 *ϕ, где ϕ* ≈ ∆*x. (4)*

2

*L*

*Из (2), (3) и (4) получаем окончательную формулу для определения* скорости пули:

*u* = *M* *g* ∆*x. (5)*

*m*

*L*

*Измерение отклонения маятника* ∆*x производится с помощью оп-* тической системы, изображенной на рис. 1. По увеличенному изобра- жению шкалы, закрепленной на цилиндре, определяется ее горизон- тальное смещение. Таким образом может быть измерено максималь- ное отклонение маятника и изменение максимальных отклонений для определения затухания колебаний.

*Справедливость соотношения (3) и, следовательно, окончательной*

*формулы (5) обусловлена возможностью пренебречь потерями энергии* при колебаниях.

*Среди причин, вызывающих затухание колебаний маятника, наибо-* лее существенными являются трение о воздух и недостаточно жесткое закрепление точки подвеса.

*Если потери энергии за четверть периода колебаний малы по срав-* нению с максимальной потенциальной энергией, которую маятник при этом приобретает, то их можно не учитывать в законе сохранения (3). Как уже говорилось, затуханием можно пренебречь, если за десять периодов амплитуда колебаний уменьшается меньше, чем в два раза.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с устройством баллистического маятника и измеритель-* ной установки, научитесь пользоваться духовым ружьем.

*2. Измерьте на аналитических весах массу каждой пульки, полученной* у лаборанта, поместите их в ячейки коробки под соответствующими номерами, чтобы не перепутать при использовании. При пользовании весами не забудьте арретировать их перед сменой пулек.

*3. Измерьте с помощью двухметровой линейки расстояние L (см. рис. 1).*

*4. Соберите оптическую систему, предназначенную для измерения пере-* мещения маятника. Включите осветитель и добейтесь четкого изобра- жения шкалы на экране.

*5. Произведите несколько холостых выстрелов по маятнику и убедитесь* в том, что он практически не реагирует на удар воздушной струи из ружья.

*6. Убедитесь в малом затухании колебаний: за десять колебаний ампли-* туда уменьшается меньше, чем наполовину.

*7. Произведите несколько выстрелов и определите по формуле (5) ско-* рость пули при каждом выстреле.

*8. Оцените погрешность определения скорости пули в каждом выстреле.*

*9. Найдите среднее значение скорости пули и разброс отдельных резуль-* татов около среднего значения. С чем связан наблюдаемый разброс: с ошибками опыта или с различием скоростей от выстрела к выстрелу?

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. В каком случае маятник называется баллистическим и для чего он может быть использован?*

*2. При каких условиях начальный импульс баллистического маятника равен импульсу пули?*

*3. Почему необходимо использовать неупругое соударение пули с маятником?*

*4. Оцените время соударения пули с маятником в проводимых опытах.*

*5. От чего зависит точность выполнения закона сохранения импульса при со- ударении тел?*

*6. Каковы требования к установке ружья?*

*7. Что влияет на затухание колебаний баллистического маятника?*

*8. Какие допущения, сделанные при выводе формулы (5), могут быть провере- ны экспериментально?*

*9. Для чего нити подвеса разведены в поперечном направлении (см. рис. 1)?*

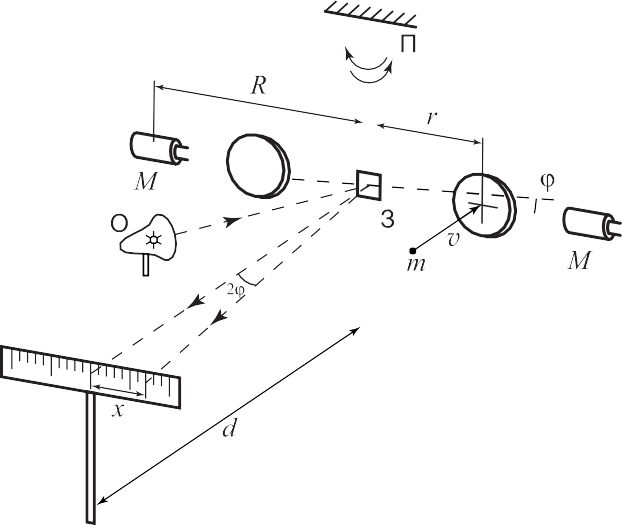
*11. Метод крутильного баллистического маятника Схема эксперимента изображена на рис. 3. Пуля массой m попада-*

*ет в мишень, укрепленную на стержне aa, который вместе с грузами*

*M и проволокой П образует крутильный маятник. Считая удар пули* о мишень неупругим, для определения скорости *u полета пули непо-* средственно перед ударом воспользуемся законом сохранения момента импульса в виде

*mur* = *I*Ω*. (6)*

*Здесь r - расстояние от линии полета пули до оси вращения маятника* (до проволоки П), *I - момент инерции маятника,* Ω *- его угловая* скорость непосредственно после удара.



*\_lис. 3. Cхема установки для измерения скорости полета пули с крутильным баллистическим маятником*

*Законом сохранения момента импульса можно воспользоваться, ес-* ли время соударения пули с мишенью значительно меньше периода малых колебаний маятника. Поворот маятника за время соударения мал по сравнению с максимальным поворотом маятника при колеба- ниях. Соответственно мал момент кручения, возникающий при этом в проволоке, по сравнению с моментом при максимальном повороте, ко- торый всегда имеет конечную величину. Но главное - мал,о произведе- ние момента кручения в проволоке на время соударения по сравнению с моментом импульса, которым обладала пуля перед ударом.

*Начальная кинетическая энергия вращения маятника переходит в* потенциальную - упругую энергию закручивания проволоки и расхо- дуется на необратимые потери - в первую очередь на трение о воздух. Роль потерь можно оценить по изменению амплитуды колебаний за

*10 периодов. Если амплитуда уменьшается менее чем наполовину, то* затухание колебаний считаем малым, то есть потери энергии за пе- риод колебаний значительно меньше энергии колебаний. Пренебрегая

*потерями, закон сохранения энергии при колебаниях записываем сле-* дующим образом:

*ϕ*2

*k* = *I*

##### 2

Ω2

*. (7)*

##### 2

*Здесь k - модуль кручения проволоки П, а ϕ - максимальный угол* поворота маятника.

*Из (6) и (7) получаем*

*u* = *ϕ*

*kI*

√

*. (8)*

*mr*

*Угол максимального закручивания маятника в данных опытах все-* гда мал и легко находится по смещению *x изображения нити осветите-* ля на измерительной шкале. Из рис. 3 следует

*x*

*ϕ* ≈ 2*d. (9)*

*Здесь d - расстояние от шкалы Ш до оси вращения маятника.*

*В формулу (8) входит произведение kI, которое можно найти по из-* мерениям периодов колебаний маятника с грузами *M и без них. В пер-* вом случае период колебаний равен

*T*1 = 2*π I . (10)*

*k*

*Во втором случае*

*Из (10) и (11) следует*

*T*2 = 2*π*

√

*I* − 2*MR*2

*k*

4*πMR*2*T*1

*. (11)*

*kI* =

1

2

*T* 2 − *T* 2

*. (12)*

*Здесь R - расстояние от центров масс грузов M до проволоки.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с конструкцией установки, научитесь пользоваться ду-* ховым ружьем.

*2. Измерьте на аналитических весах массу каждой, полученной у лабо-* ранта пульки, поместите их в ячейки коробки под соответствующими номерами, чтобы не перепутать при использовании. Не забывайте ар- ретировать весы перед сменой пулек.

*3. Измерьте с помощью линейки расстояния r, R и d (см. рис. 3).*

*4. Настройте оптическую систему, предназначенную для измерения пово-* рота маятника. Включите осветитель О, направьте свет на зеркальце З и получите четкое изображение нити осветителя на шкале.

*5. Произведите несколько холостых выстрелов и убедитесь, что маятник* практически не реагирует на воздушную струю из ружья.

*6. Убедитесь в малом затухании колебаний: за десять колебаний ампли-* туда уменьшается меньше, чем наполовину.

*7. Измеряя время 10-15 полных крутильных колебаний*√*маятника, опре-*

*делите T*1 *и T*2*. По формуле (12) найдите величину kI и оцените ее*

*погрешность.*

*8. Произведите несколько выстрелов и по формулам (9) и (8) определите* скорость пули при каждом выстреле.

*9. Оцените погрешность определения скорости пули в каждом выстреле.*

*10. Найдите среднее значение скорости пули и разброс отдельных резуль-* татов около среднего значения. С чем связан разброс результатов: с погрешностями измерений или с различием скоростей пули в разных опытах?

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Как сказывается на применимости данного метода отличие угла, под кото- рым направлена скорость пули к поверхности мишени, от прямого?*

*2. При каких амплитудах колебаний маятника следует измерять периоды?*

*3. Как влияет импульс пули на колебания маятника?*

*4. Какая доля энергии пули переходит в тепло в I и II опыте в результате соударения с маятником?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 26, 30, 33, 34,*

*41.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 53, 124, 126.*

*3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. §§ 22, 26, 67,*

*68, 89, 95.*

## *Рабuта 1.2.2*

### *Экспериментальная проверка закона* вращательного движения на крестообразном маятнике

*Цель работы: 1) экспериментально получить зависимость углового ускорения от момента прикладываемых к маятнику сил, убедиться, что угловое ускорение зависит линейно от момента сил, определить момент инерции маятника, 2) проанализировать влияние сил трения, действующих на ось вращения.*

*В работе используются: крестообразный маятник, набор перегруз- ков, секундомер, линейка, штангенциркуль.*

*В данной работе экспериментально проверяется уравнение враща-* тельного движения:

*dω*

*I* = *M. (1)*

*dt*

*Для этого используется крестообразный маятник, устройство которого*

*понятно из рис. 1.*

*Маятник состоит из четырех тонких стержней, укрепленных на* втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов (*r*1 *и r*2*) насажаны на общую ось. Ось закреплена в игольча-* тых подшипниках, так что вся система может свободно вращаться во- круг горизонтальной оси. Момент инерции маятника можно изменять, передвигая грузы *m*1 *вдоль стержней. На один из шкивов маятника* навита тонкая нить. Привязанная к ней легкая платформа известной массы служит для размещения перегрузков. Вращающий момент со- здается силой натяжения нити *T :*

*Mн* = *rT, (2)*

*где r - радиус шкива (r*1 *или r*2*). Силу T легко найти из уравнения* движения платформы с перегрузком:

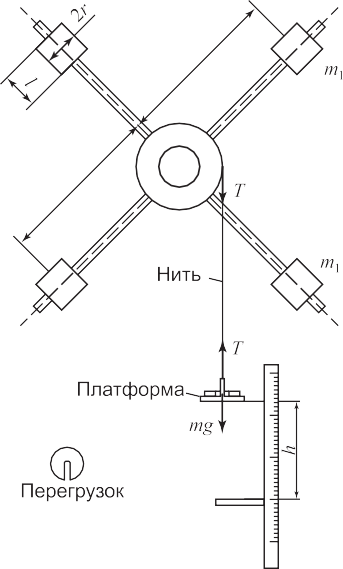
*mg* − *T* = *ma. (3)*

*Здесь m - масса платформы с перегрузком.*

*Если момент сил трения Mтр в подшипниках мал по сравнению с* моментом *Mн силы натяжения нити, то из (1), (2) и (3) следует посто-* янство ускорения *a, и, измеряя время t, в течение которого нагружен-* ная платформа из состояния покоя опускается на расстояние *h, можно* найти ее ускорение *a:*

2*h*

*a* = *t*2 *, (4)*



*\_lис. 1. Kрестообразный маятник*

*связанное с угловым ускорением β* = *dω/dt простым соотношением:*

*dω*

*a* = *r*

*dt*

= *rβ. (5)*

*Система уравнений (2) - (5) полностью решает поставленную задачу.* В реальных опытах момент сил трения *Mтр может оказаться доста-* точно большим и существенно исказить результаты опыта. На первый взгляд относительную роль этого момента легко уменьшить, увеличи-

*вая массу m. Это, однако, не так, поскольку:*

*1) увеличение массы m ведет к увеличению давления маятника на ось,* что вызывает возрастание сил трения;

*2) увеличение m уменьшает время t падения платформы и, следова-* тельно, ухудшает точность измерения времени.

*В нашей установке момент сил трения снижен благодаря крепле-* нию оси маятника в игольчатых подшипниках (см. рис. 1), однако вли- яние трения вполне ощутимо и должно приниматься во внимание при обработке результатов опыта.

*Для дальнейшей работы удобно преобразовать уравнение (1), выде-* лив момент сил трения в явном виде:

*dω*

*Mн* − *Mтр* = *I dt . (6)*

*Прежде чем начинать эксперимент, установите грузы m*1 *на некото-* ром расстоянии *R от оси маятника так, чтобы маятник находился в* безразличном равновесии. Полезно несколько раз привести маятник во вращение, каждый раз давая ему возможность остановиться. Поду-

*майте, зачем это нужно. Как на основании этих опытов узнать, хорошо* ли сбалансирован маятник (т. е. действительно ли он находится в без- различном равновесии)? На любой из шкивов намотайте нить в один слой и установите высоту *h падения платформы с перегрузком. Ре-* комендуемая высота 70-100 см. Все измерения удобно проводить при постоянной высоте *h и при 3-5 значениях перегрузков.*

*Экспериментальная часть работы делится на две части. В первой*

*исследуется вращательное движение маятника под действием различ-* ных перегрузков при постоянном моменте инерции системы (положе- ние грузов *m*1 *фиксировано). Из данных этого опыта определяют мо-* мент инерции системы *I, а также момент сил трения Mтр, действую-* щих в подшипниках.

*Во второй части изучается вращательное движение маятника при* различных (5-6) значениях момента инерции системы. Момент инер- ции системы варьируют, изменяя расстояние *R центров масс грузов* от оси вращения. Измеренные значения момента инерции сравнивают- ся с расчетными. Грузы *m*1 *имеют форму цилиндров с радиусом r и с* образующей *l. Момент инерции всей системы вычисляется по формуле*

*I* = *I*0 + 4*m*1*R*2

*m*1*l*2

##### + 4

12

*m*1*r*2

##### + 4

4

*, (7)*

*где I*0 *- момент инерции системы без грузов m*1*. Вывод этой формулы* мы предоставляем читателю.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Добейтесь безразличного равновесия маятника при некотором расстоя-* нии *R грузов m*1 *от его оси. Расстояние R нужно измерить и записать.*

*2. Увеличивая натяжение нити T с помощью перегрузков, найдите ми-* нимальное значение массы перегрузка *m*0*, при котором маятник на-* чинает вращаться. Проделайте этот опыт на обоих шкивах. Оцените величину момента сил трения.

*3. Возьмите перегрузок и, проведя опыт, измерьте время падения груза.* Повторите опыт 4-5 раз. Усредните найденные значения *t. Используя* формулы (2) - (5), определите угловое ускорение *β* =  2*h и вращающий*

*rt*2

*момент Mн. Данные удобно занести в таблицу:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Диаметр шкива* | *Масса перегрузка* | *Масса платформы с перегрузком* | *Время падения* | | | | | *t*¯± *σt*¯ | *β* ± *σβ* | *Mн* ± *σM* |
| *см* | *г* | *г* | *t*1 | *t*2 | *t*3 | *t*4 | *t*5 | *с* | *с*−2 | *Н*·*м* |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*4. Повторите этот опыт для 3-4 различных значений m как на одном, так* и на другом шкиве (всего 6-8 измерений). Данные внесите в таблицу.

*5. Результаты экспериментов (на обоих шкивах) представьте в виде гра-* фика, по оси абсцисс которого отложите величину *Mн, а по оси орди-* нат - угловое ускорение маятника *β. Из графика определите момент* инерции системы *I и момент сил трения Mтр (пересечение линейной* зависимости *β*(*Mн*) *с осью абсцисс). Оцените ошибки в определении* этих величин.

*6. Для двух различных значений момента инерции системы, получаю-* щихся при максимальном и минимальном удалении грузов *m*1 *от оси* вращения, повторите измерения, описанные в пп. 3-5.

*7. Сравните результаты определения Mтр во всех экспериментах. Зависит* ли величина *Mтр от момента инерции системы?*

*8. Повторите эксперименты, описанные в п. 3, для трех различных зна-* чений моментов инерции системы, используя только один перегрузок и шкив большего радиуса. Для каждого случая определите величину *I по формуле (6). Значение Mтр возьмите из п. 5.*

*9. Результаты, полученные для I при различных R во всех эксперимен-* тах, представьте в виде графика *I* = *f* (*R*2)*, где R - расстояние грузов* *m*1 *от оси вращения. По графику определите момент инерции системы* *I*0 *без грузов.*

*Находятся ли результаты эксперимента в согласии с формулой (7)?* Как меняется относительная роль двух последних членов формулы

*(7) при изменении величины R? Существенно ли отличается поправка,* определяемая этими членами, от ошибок измерений? Ответ на два по-

*следних вопроса лучше всего дать в виде графика зависимости* ∆*I/I*

*от R*2*, где*

∆*I* = 4

*ml*2

##### 12

*mr*2

##### + 4 *.*

4

*10. Укажите возможные причины ошибок эксперимента.*

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Почему стремятся уменьшить величину момента сил трения в оси маятника? Казалось бы, даже большую величину Mтр можно легко учесть с помощью уравнения (6).*

*2. Какова роль толщины и упругости нити в опыте?*

*3. Какую величину в данном эксперименте следует измерять с наибольшей точ- ностью?*

*4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса3Штейнера.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 30, 32, 35, 36.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. Гл. VII, §§ 52, 53, 59, гл. V,*

*§§ 41, 42.*

## *Рабuта 1.2.3*

### *Определение моментов инерции твердых тел* с помощью трифилярного подвеса

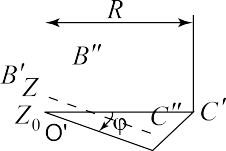
*Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравне- ние результатов с расчетами по теоретическим формулам, проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюй- генса3Штейнера.*

*В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счет- чик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).*

*Инерционность при вращении тела относительно оси определяется* моментом инерции тела относительно этой оси (см. введение к данному разделу). Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

*I* = *r*2 *dm. (1)*

*Здесь r - расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Инте-* грирование проводится по всей массе тела *m.*



*\_lис. 1. Трифилярный подвес*

*Для однородных тел известной плотности при заданных размерах* и достаточно простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел и тел сложной формы момент инерции можно опре- делить экспериментально. Удобно использовать устройство, показан- ное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы *P и под-*

*вешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA*′*, BB*′

*и CC*′ *вращающейся платформы P* ′*.*

*Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на* рисунке не показан), при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платфор- мы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на непо- движной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных

*движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчеты. По-* сле поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платфор- ма остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После

*того, как нижняя платформа P* ′ *оказывается повернутой на угол ϕ от-* носительно верхней платформы *P, возникает момент сил, стремящий-*

*ся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором* относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равно- весия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа соверша- ет крутильные колебания.

*Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в крепле-* ниях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

*Iϕ*˙2

2 + *mg*(*z*0 − *z*) = *E. (2)*

*Здесь I - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,* *m - масса платформы с телом, ϕ - угол поворота платформы от поло-* жения равновесия системы, точкой обозначена производная по време- ни (угловая скорость), *z*0 *- координата по вертикали центра нижней* платформы *O*′ *при равновесии (ϕ* = 0*), z - координата той же точки* при некотором угле поворота *ϕ. Первый член в левой части уравне-*

*ния - кинетическая энергия вращения, второй член - потенциальная* энергия в поле тяжести, *E - полная энергия системы (платформы с* телом).

*Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая си-* ла возникает благодаря силе тяжести.

*Воспользуемся системой координат x, y, z, связанной с верхней* платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца од- ной из нитей подвеса точки *C в этой системе - (r, 0, 0 ). Нижний конец* данной нити *C*′*, находящийся на нижней платформе, при равновесии* имеет координаты (*R, 0, z*0*), а при повороте платформы на угол ϕ эта* точка переходит в *C*′′ *с координатами (R* cos *ϕ, R* sin *ϕ, z). Расстояние* между точками *C и C*′′ *равно длине нити L. Поэтому*

(*R* cos *ϕ* − *r*)2 + *R*2 sin2 *ϕ* + *z*2 = *L*2*. (3) Учитывая, что при малых углах поворота* cos *ϕ* ≈ 1 − *ϕ*2*/*2*, получаем*

*z*2 = *L*2 − *R*2 − *r*2 + 2*Rr* cos *ϕ* = *z*2 − 2*Rr*(1 − cos *ϕ*) ≈ *z*2 − *Rrϕ*2*. (4)*

0

0

*Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла ϕ, имеем*

✓ 2 ✓

*z* ≈

*z*0 − *Rrϕ*2 ≈ *z*0

1 −

≈ *z*0 −

*. (5)*

*Rrϕ*2

*z*

2

0

*Rrϕ*2

2*z*0

*Подставляя это значение z в уравнение (2), получаем*

1 *Iϕ*˙2 + *mg Rr ϕ*2 = *E. (6)*

##### 2 2*z*0

*Дифференцируя по времени и сокращая на ϕ*˙*, находим уравнение* крутильных колебаний системы:

*Iϕ*¨ + *mg*

*Rr*

*ϕ* = 0*. (7)*

*z*0

*Производная по времени от E равна нулю, так как потерями энергии* на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

*Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подста-* новкой, имеет вид

*ϕ* = *ϕ*0

sin *mgRrt* + *θ . (8)*

*Iz*0

*Здесь амплитуда ϕ*0 *и фаза θ колебаний определяются начальными* условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

*T* = 2*π Iz*0

✓

*mgRr*

*. (9)*

*Обратим внимание на то, что из этой формулы при r* = *R и I* = *mR*2

*(тонкое кольцо) получаем формулу для математического маятника.*

*Из (9) находим формулу для определения момента инерции:*

*mgRrT* 2

*I* = 4*π*2*z*0 *. (10)*

*Учитывая, что параметры установки R, r и z*0 *при проведении опы-* тов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

*gRr*

*I* = *kmT* 2*. (11)*

*Здесь k* = 4*π*2*z*0 *- величина, постоянная для данной установки.*

*Таким образом, полученные формулы позволяют определить мо-* мент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответ- ствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

*При выводе формул предполагалось, что малы необратимые поте-* ри энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время *τ уменьшения* амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний *T . Необрати-* мыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

*τ* ≫ *T. (12)*

*В данной работе рекомендуется период колебаний определять с от-* носительной погрешностью 0,5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью измерения времени.

*Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из* осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Не нагружая нижней платформы, проверьте, пригодна ли установ-* ка для измерений, то есть нормально ли функционирует устройство для возбуждения крутильных колебаний, не возникают ли при этом нежелательные маятниковообразные движения платформы, работает ли счетчик числа колебаний.

*2. Возбудив в установке крутильные колебания, проверьте, достаточно ли* хорошо выполняется соотношение (12). При этом добиваться большой точности в измерении периода и времени уменьшения амплитуды в 2-3 раза не имеет смысла. Проводить измерение рекомендуется для ненагруженной платформы. Объясните, почему нужно так делать.

*3. Найдите рабочий диапазон амплитуд колебаний. Амплитуду надо* уменьшать до тех пор, пока период колебаний, определенный по 20-30 полным колебаниям, не перестанет зависеть от амплитуды. Рабочий диапазон начинается с тех амплитуд, для которых период совпадет с периодом колебаний с амплитудой вдвое меньшей.

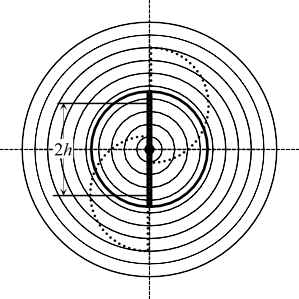
*4. Измерьте параметры установки: z*0*, R и r (см. рис. 1). По ним вычис-* лите константу установки *k, входящую в формулу (11), и ее погреш-* ность *σk.*

*5. Определите момент инерции ненагруженной платформы (здесь и далее* периоды колебаний следует определять с относительной погрешностью не хуже 0,5%).

*6. Измерьте моменты инерции двух тел из имеющегося набора сначала* порознь, а затем вместе. Помещать тела на платформу надо так, что- бы общий центр масс всегда находился на оси вращения (оси симмет- рии) системы, то есть чтобы не было заметного перекоса платформы. Для удобства на платформе нанесен ряд концентрических окружно- стей. Проверьте аддитивность моментов инерции, то есть справедли-

*вость соотношения I* = *I*1 + *I*2*, где I*1 *и I*2 *- моменты инерции первого* и второго тел, а *I - общий момент инерции. Погрешность, с кото-*

*рой выполняется это соотношение, является хорошей мерой точности* проводимых измерений. Рассчитайте теоретически моменты инерции *I всех используемых в эксперименте тел и сравните результаты с из-* меренными значениями *I.*

*7. Поместите на платформу диск, разрезан-* ный по диаметру. Постепенно раздвигая по- ловинки диска так, чтобы их общий центр масс всё время оставался на оси вращения платформы (рис. 2), снимите зависимость момента инерции такой системы *I от рас-*

*стояния h каждой из половинок до оси вра-*

*щения (центра платформы).*

*Постройте график зависимости I*(*h*2) *и* определите по нему массу и момент инер-

*ции диска.*

*\_lис. 2. \_lасположение тел на платформе*

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. При каких упрощающих предположениях вы- ведена формула (10)?*

*2. Можно ли пользоваться предложенным методом для определения моментов инерции тел в том случае, когда ось вращения платформы не проходит через центр масс?*

*3. Выведите формулу Гюйгенса3Штейнера.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 35, 36, 42.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 52, 55, 59.*

*3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. §§ 67, 68, 89.*

## *Рабuта 1.2..4*

### *Определение главных моментов инерции* твердых тел с помощью крутильных колебаний

*Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теорети- ческую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относи- тельно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.*

*В работе используются: установка для получения крутильных колебаний (жесткая рамка, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), на- бор исследуемых твердых тел, секундомер.*

*Инерционные свойства твердого тела при вращении определяет не* только величина его массы, но и ее пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина, которая называется тензором инерции. Тензор инерции твердого тела может быть пред- ставлен симметричной матрицей, которая полностью определяется за- данием шести элементов. Если для какой-либо системы координат из- вестны все шесть элементов матрицы, то момент инерции тела относи- тельно произвольной оси, проходящей через начало координат, может быть вычислен по формуле (2.46). Как и всякая симметричная матри- ца, матрица тензора инерции может быть приведена к диагональному виду, диагональные элементы *Ix, Iy, Iz которой называются главными* моментами инерции тела. Геометрическим образом тензора инерции яв- ляется эллипсоид, уравнение которого в главных осях имеет вид (2.51):

*Ixx*2 + *Iyy*2 + *Izz*2 = 1*. (1)*

*Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Эллипсоид* инерции жестко связан с телом, для которого построен. Координат- ные оси *Ox, Oy, Oz совпадают с главными осями тела. Если начало* координат *O совпадает с центром масс тела, то эллипсоид инерции* называется центральным.

*Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции те-* ла относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Для этого необходимо вдоль выбранной оси провести радиус-вектор *-r до*



*\_lис. 1. Эллипсоиды инерции параллелепипеда, диска и куба*

*пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина r будет определять* момент инерции тела относительно этой оси:

##### 1

*I* = *r*2 *. (2)*

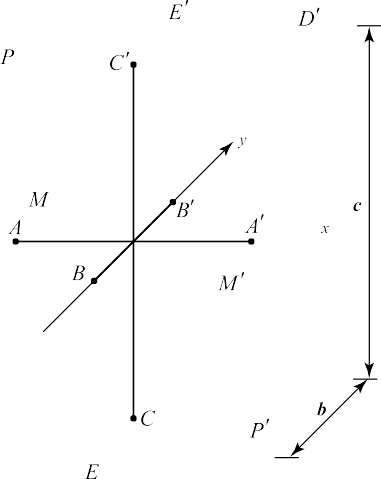
*\_lис. 2. Cхема установки*



*Главные оси тела часто можно определить из* его симметрии. Например, оси симметрии цилин- дра или шара являются главными осями, так как для всех осей, лежащих в плоскости перпендику- лярной оси симметрии, моменты инерции одина- ковые, и, следовательно, эллипсоид инерции об- ладает такой же симметрией, являясь эллипсои- дом вращения относительно оси симметрии тела. Эллипсоид инерции оказывается симметричным и для некоторых тел, не обладающих осевой сим- метрией. Например, для прямоугольного парал- лелепипеда с квадратным основанием и для ку- бика. Для последнего эллипсоид превращается в сферическую поверхность, из чего следует, что величина момента инерции не зависит от направ- ления оси, так же как в случае шара. На рис. 1 для прямоугольного параллелепипеда, диска и кубика нарисованы (в произвольном масштабе) центральные эллипсоиды инерции.

*В данной работе используется устройство для получения крутиль-* ных колебаний, изображенное на рис. 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле име- ются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

*Крутильные колебания рам-* ки с телом описываются урав- нением



*d*2*ϕ*

(*I* + *Iр*) *dt*2 = −*fϕ. (3)*

*Здесь I и Iр - моменты инер-* ции тела и рамки относитель- но оси вращения, *ϕ - угол по-* ворота рамки, меняющийся со временем *t, f - модуль кру-* чения проволоки. Период кру- тильных колебаний рамки с те- лом определяется формулой

✓

*T* = 2*π I* + *Iр . (4)*

*f*

*На рис. 3 показано, как про-* ходят оси вращения в паралле- лепипеде. Оси *AA*′*, BB*′ *и CC*′ *являются главными. Моменты*

*\_lис. 3. Oси вращения прямоугольного параллелепипеда*

*инерции относительно этих осей обозначим соответственно Ix, Iy и Iz.* Ось *DD*′*, проходящая вдоль диагонали параллелепипеда, с главными* осями составляет такие же углы, как с ребрами *a, b и c, которые им* параллельны. Косину√*сы этих углов соответственно a/d, b/d и c/d, где*

*длина диагонали d* = *a*2 + *b*2 + *c*2*.*

*Момент инерции Id при вращении относительно диагонали DD*′ *вы-*

*ражается через главные моменты с помощью формулы (2.53):*

*a*2 *b*2 *c*2

*Id* = *Ix d*2 + *Iy d*2 + *Iz d*2 *. (5)*

*Отсюда получаем соотношение*

(*a*2 + *b*2 + *c*2)*Id* = *a*2*Ix* + *b*2*Iy* + *c*2*Iz. (6)*

*Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний* (4), получаем соотношение между периодами колебаний

(*a*2 + *b*2 + *c*2)*T* 2 = *a*2*T* 2 + *b*2*T* 2 + *c*2*T* 2*. (7)*

*d x y z*

*Экспериментальная проверка этого соотношения является вместе с* тем и проверкой соотношения (5). Из этой формулы следуют также выражения, связывающие моменты инерции относительно осей *EE*′*,*

*MM* ′ *и PP* ′ *с главными моментами инерции. С помощью (4) и для*

*этих осей получаем выражения для периодов крутильных колебаний.*

*Студентам предлагаем самим найти косинусы углов, которые данные* оси составляют с главными осями, и получить формулы

(*b*2 + *c*2)*T* 2 = *b*2*T* 2 + *c*2*T* 2*, (8)*

*E y z*

(*a*2 + *c*2)*T* 2 = *a*2*T* 2 + *c*2*T* 2*, (9)*

*P x z*

(*a*2 + *b*2)*T* 2 = *a*2*T* 2 + *b*2*T* 2*. (10)*

*M x y*

*Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с установкой для получения крутильных колебаний.* Проверьте: 1) хорошо ли натянута проволока, 2) жестко ли закреплена на ней рамка, 3) нормально ли работает устройство для возбуждения крутильных колебаний, 4) не возникают ли, кроме крутильных колеба- ний рамки, еще и колебания в вертикальной плоскости (их не должно быть).

*2. Научитесь закреплять тела в рамке. На телах имеются специальные* углубления, в которые должны входить винты, имеющиеся на рамке. Для закрепления тела в рамке (рис. 2) нужно, отвернув гайки 5, под- нять вверх подвижную планку 4 на рамке, вставить тело в рамку, попав углублением, имеющимся на теле, на выступ нижней стороны рамки. Опуская планку, необходимо выступающим из планки на 5-7 мм вин- том 6 попасть в отверстие на теле. Закрепив планку гайками 5, немного подожмите тело винтом 6. Если в дальнейшем обнаружится, что тело поворачивается в рамке, надо его еще поджать винтом 6.

*3. Перед каждой серией измерений (пустая рамка или рамка с определен-* ным закреплением тела) необходимо выбрать амплитуду крутильных колебаний (угол максимального поворота рамки). Амплитуда выбра- на правильно, если при уменьшении ее в два раза период колебаний,

*определяемый по 10-15 колебаниям, остается тем же. Если этого не* происходит, то амплитуду надо еще уменьшать.

*4. Для пустой рамки и всех тел при различных их положениях относи-* тельно оси колебаний определите периоды колебаний по времени 10-15 колебаний, повторяя каждое измерение не менее 3 раз.

*5. Штангенциркулем измерьте геометрические размеры параллелепипе-* да. Вычислите главные моменты инерции. По полученным ранее дан- ным проверьте справедливость формул (7) - (10).

*6. Нарисуйте сечения эллипсоида инерции главными плоскостями. Для* этого выберите измеренные периоды колебаний для осей в главной плоскости и для каждой оси вычислите величину 1*/ T* 2 *T* 2*, которая* пропорциональна расстоянию от центра масс тела до точки пересече- ния эллипсоида с этой осью (здесь *Tр - период крутильных колебаний* пустой рамки). Эти величины надо отложить вдоль направлений соот- ветствующих осей и через их концы (должно получиться 8 точек) про- вести эллипс. Это и будет сечение эллипсоида главной плоскостью (в произвольном масштабе). Найдите отношения главных моментов инер- ции.

*р*

−

*7. Проведите аналогичные измерения для куба и постройте для него соот-* ветствующие сечения эллипсоида инерции. Убедитесь в равенстве всех центральных моментов инерции.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Что такое главные моменты инерции твердого тела?*

*2. Как выглядит эллипсоид инерции кубика?*

*3. Как происходит свободное (в отсутствие внешних моментов сил) вращение твердого тела?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 53, 54.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 63, 64.*

## *Рабuта 1.2.5*

### *Исследование вынужденной регулярной* прецессии гироскопа

*Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величи- ны момента сил, действующих на ось гироскопа, определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитан- ной по скорости прецессии.*

*В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундо- мер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.*

*Уравнения движения твердого тела можно записать в виде*

*dP-* dt

*dL-* dt

= *F- , (1)*

= *M- . (2)*

*Здесь (1) выражает закон движения центра масс тела, а (2) - урав-* нение моментов. Поскольку твердое тело имеет только шесть степеней свободы, этих двух векторных уравнений достаточно для полного опи- сания состояния его движения.

*Если сила F- не зависит от угловой скорости, а момент M-*

*- от ско-*

*рости поступательного движения, то уравнения (1) и (2) можно рас-*

*сматривать независимо друг от друга. В баллистике, например при* движении снаряда в воздухе, это невозможно. В случае же, когда та- кое раздельное рассмотрение возможно, уравнение (1) соответствует просто задаче о движении материальной точки, а уравнение (2) - за- даче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В данной работе рассматривается последняя из этих задач.

*Момент импульса твердого тела в его главных осях x, y, z равен*

*L-* = *-i Ixωx* + *-j Iyωy* + *-k Izωz, (3)*

*где Ix, Iy, Iz - главные моменты инерции, ωx, ωy, ωz - компоненты* вектора угловой скорости *ω- . Быстро вращающееся тело, для которого,* например,

*Izωz* ≫ *Ixωx, Iyωy,*

*принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным,* если его центр масс неподвижен.

*В силу (2) приращение момента импульса определяется интегралом*

∆*L-* = *M- dt. (4)*

*Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка*

*времени, из интеграла (4) следует, что приращение* ∆*L-*

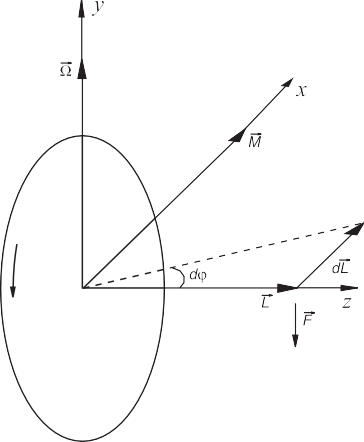
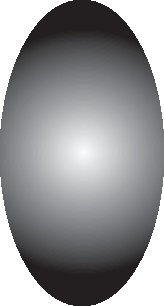
*пульса значительно меньше самого момента импульса:*

|∆*L-* | ≪ |*L-* |*.*

*момента им-*

*С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает дви-* жение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

*Выясним, какие силы надо при-* ложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся во- круг оси *z, перпендикулярной к плос-* кости маховика (рис. 1). Будем счи- тать, что



*ωz* = *ω*0*, ωx* = 0*, ωy* = 0*.*

*Пусть ось вращения повернулась в* плоскости *zx по направлению к оси x* *на бесконечно малый угол dϕ. Такой* поворот означает добавочное враще- ние маховика вокруг оси *y, так что*

*dϕ* = Ω *dt,*

*\_lис. 1. Mаховик*

*где* Ω *- угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что*

*L*Ω ≪ *Lω*0 *. (5)*

*Это означает, что момент импульса маховика, равный Izω*0 *до прило-* жения внешних сил, только повернется в плоскости *zx по направлению* к оси *x не изменяя своей величины. Таким образом,*

|*dL-* | = *Ldϕ* = *L*Ω *dt.*

*Но это изменение направлено вдоль оси x, поэтому вектор dL-*

*можно*

*представить в виде векторного произведения вектора угловой скоро-* сти Ω*- , направленного вдоль оси y, на вектор собственного момента* импульса маховика, направленного вдоль оси *z,*

*dL-* = Ω*-* × *L- dt,*

*т. е.*

*dL-* dt

= Ω*-* × *L- . (6)*

*Полученное уравнение имеет простой смысл: вектор L- (а значит и ось*

*гироскопа) вращается с постоянной угловой скоростью* Ω*-*

*и неизменен*

*по модулю (действительно, если некий радиус-вектор -r вращается с*

*угловой скоростью -ω, то скорость его конца, согласно определению* вектора *-ω, равна -r*˙ = *ω- -r).*

×

*Окончательно, в силу (2) имеем*

*M-* = Ω*-* × *L- . (7)*

*Формула (7) справедлива, если выполнено условие (5). Она поз-* воляет определить момент сил *M- , который необходимо приложить к* маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью Ω*- . Мы видим, таким образом, что для поворота оси враща-* ющегося маховика к оси *x необходимо приложить силы, направленные*

*не вдоль оси x, а вдоль оси y, так чтобы их момент M-*

*вдоль оси x.*

*был направлен*

*Под действием момента M-*

*внешних сил ось гироскопа медленно*

*вращается вокруг оси y с угловой скоростью* Ω*. Такое движение назы-*

*вается регулярной прецессией гироскопа. В частности, создающей мо-*

*мент внешней силой может оказаться сила тяжести, если центр масс* гироскопа не совпадает с точкой подвеса. Для гироскопа массой *m',* у которого ось собственного вращения наклонена на угол *α от верти-* кали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

Ω = *M* = *m'glц* sin *α* = *m'glц , (8)*

*Izω*0 sin *α*

*Izω*0 sin *α*

*Izω*0

*где lц - расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е.* скорость прецессии не зависит от угла *α.*

*Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа*

*к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий*

*центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию.*

*Скорость прецессии в этом случае равна*

*mgl*

#### Ω =

*Izω*0

*, (9)*

*где m - масса груза, l - расстояние от центра карданова подвеса до* точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 3).

*В данной работе исследуется регулярная прецессия уравновешенно-* го гироскопа.

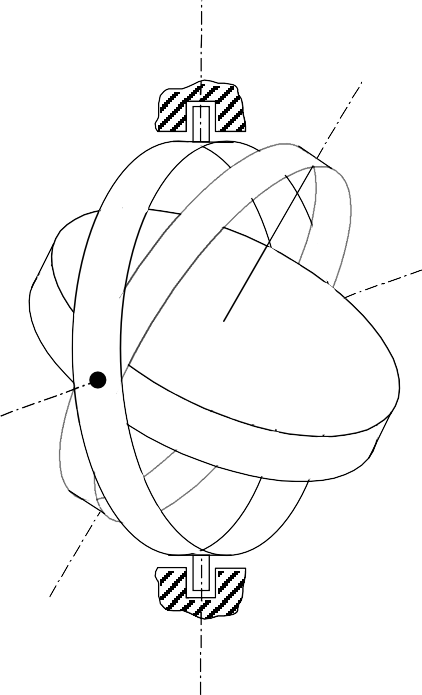
*Уравновешенный гироскоп, закрепленный в кольцах карданова под-* веса, показан на рис. 2. Наружное кольцо подвеса А может свободно поворачиваться вокруг вертикальной оси аа. Внутреннее кольцо Б свя- зано с кольцом А горизонтальной осью бб. В кольце Б укреплен гиро- скоп, ось вращения которого вв перпендикулярна к оси бб. Центр масс гироскопа находится на пересечении всех трех осей и при любом пово- роте колец сохраняет свое положение в пространстве. Получается, что гироскоп как бы подвешен за центр масс.

*Экспериментальная установка для исследования прецессии уравно-* вешенного гироскопа показана на рис. 3. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током часто- той 400 Гц. Кожух мотора (статор, имеющий обмотки, питаемые током частотой 400 Гц) скреплен с кольцом Б (рис. 2 и 3). Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси бб, которое может вращаться вокруг вертикальной оси аа. Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, обра- зующими <беличье колесо>. Обозначенный на рис. 3 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г. Подвешивая различные грузы, можно менять силу *F, момент которой*

*определяется расстоянием l от точки подвеса до горизонтальной оси*

*кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.*

*Выше при выводе формул для прецессии предполагалось, что дей-* ствующие на гироскоп силы лежат в плоскости *zy, в которой лежат век-* торы угловых скоростей собственного вращения и прецессии. В этом случае, как уже говорилось, момент сил меняет лишь направление мо- мента импульса гироскопа, но не его величину. Силы трения не лежат в плоскости осей вращения. Они приводят к изменению момента им- пульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа дей- ствие сил трения скомпенсировано действием электромотора. Для осей карданова подвеса компенсации нет. В результате ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза. Читателю предлагается про- анализировать роль сил трения и оценить погрешности, которые воз-



*a*

в

*A*

Б

б

б

в

*a*

*\_lис. 2. 'ироскоп в кардановом подвесе*

*никнут при определении скорости вращения гироскопа относительно* его оси симметрии *ω*0*, связанные с постепенным опусканием оси гиро-* скопа.

*В первой части работы исследуется зависимость скорости прецес-* сии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа (к рычагу С) подвешиваются грузы Г. Скорость пре- цессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемое секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате пре-

*цессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует* приподнять на 5-6◦*. Опыт надо закончить, когда рычаг опустится на* такой же угол.

*Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить уг-* ловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле

*(9). Момент инерции ротора относительно оси симметрии I*0 *измеряет-*





*\_lис. 3. Cхема экспериментальной установки*

*ся по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой* вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных коле- баний *T*0 *зависит от момента инерции I*0 *и модуля кручения проволо-* ки *f:*

✓

*T*0 = 2*π I*0 *. (10)*

*f*

*Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гиро-* скопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычис- лить момент инерции *Iц. Для определения момента инерции ротора* гироскопа имеем

*T* 2

*I*0 = *Iц*  0 *, (11)*

*T*

2

*ц*

*здесь Tц - период крутильных колебаний цилиндра.*

*Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не при-*

*бегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироско-* пов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую - для измерения числа оборотов ротора. Ротор

*электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во* второй обмотке переменную электродвижущую силу (ЭДС) индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой - переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Установите ось гироскопа в горизонтальное положение, осторожно по-* ворачивая ее за рычаг С.

*2. Включите питание гироскопа и подождите 4-5 минут, чтобы вращение* ротора успело стабилизироваться.

*3. Убедитесь в том, что ротор вращается достаточно быстро: при лег-* ком постукивании по рычагу С последний не должен изменять своего положения в пространстве. Объясните причину устойчивости оси гиро- скопа. <Поиграйте> с гироскопом, нажимая карандашом на рычаг С. Как движется гироскоп при нажатии на рычаг? По реакции гироскопа определите, в какую сторону вращается ротор.

*4. Подвесьте к рычагу С груз Г. При этом должна начаться прецессия* гироскопа. Трение в оси (в какой именно?) приводит к тому, что рычаг С начинает медленно опускаться.

*5. Отклоните рычаг С на 5-6 градусов вверх от горизонтальной плоско-* сти. Подвесьте к нему груз Г и с помощью секундомера найдите угло- вую скорость регулярной прецессии Ω *(по числу оборотов и времени* прецессии). Измерения продолжайте до тех пор, пока рычаг С не опу- стится на 5-6 градусов ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов относительно вертикальной оси. Измерьте также ско- рость опускания рычага С. Повторите этот опыт не менее пяти раз. Усредните полученные результаты.

*6. Проделайте всю серию экспериментов, описанных в пункте 5 при 5-7* значениях момента *M силы F относительно центра масс гироскопа* (длина плеча *l указана на установке). Результаты опытов изобразите* в виде графика Ω *в зависимости от M.*

*7. Измерьте момент инерции ротора гироскопа относительно оси симмет-* рии *I*0*. Для этого подвесьте ротор, извлеченный из такого же гироско-* па, к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и измерьте период крутильных колеба-

*ний получившегося маятника. Замените ротор гироскопа цилиндром,* для которого известны или легко могут быть измерены радиус и мас- са, и определите для него период крутильных колебаний. Пользуясь формулой (11), вычислите момент инерции ротора гироскопа *I*0*.*

*8. Оцените погрешности в определении I*0 *и* Ω*.*

*9. Рассчитайте с помощью (9) частоту вращения ротора гироскопа.*

*10. По скорости опускания рычага С во время прецессии определите мо-* мент сил трения.

*11. Определите частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу.* Для этого включите осциллограф и генератор тумблерами <Сеть> и подайте на <Вход У> осциллографа сигнал со второй обмотки статора гироскопа (с двух клемм на подставке гироскопа), а на <Вход синхр.> - сигнал с выхода генератора. Для получения фигуры Лиссажу на ос- циллографе необходимо нажать тумблер <Вход Х>, повернуть вправо до упора ручку <Стабильность>, переключателем <Усилитель U> до- биться подходящего размера изображения по вертикали, а с помощью переключателя <Пределы шкалы U> и ручки <Рег. вых.> на генерато- ре - удобного размера изображения по горизонтали. Переключателем

*<Множитель частоты> и ручкой <НZ> на генераторе добейтесь, что-* бы на экране осциллографа появилась фигура, похожая на эллипс. Подберите частоту генератора так, чтобы эллипс стал неподвижным. Если этого сделать не удается, то выключите на короткое время пита- ние электромотора гироскопа, чтобы ток первой обмотки не наводил ЭДС во второй и не мешал измерениям. Делать измерения при этом надо быстро, так как при выключенном питании ротор гироскопа на- чинает замедлять свое вращение. Получение на экране осциллографа неподвижного эллипса означает, что частота сигнала генератора равна частоте вращения ротора гироскопа.

*12. Оцените погрешность полученных результатов. Сравните угловые ско-* рости вращения ротора гироскопа, определяемые разными методами.

*13. Убедитесь в применимости соотношения (5) в данной работе.*

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?*

*2. От чего зависит скорость регулярной прецессии гироскопа?*

*3. Какова размерность модуля кручения, входящего в формулу для определе- ния периода крутильных колебаний (10)?*

*4. Получите формулу (9) из формулы (8).*

*5. Чем объяснить, что монета, катящаяся по полу, поворачивает в ту сторону, в которую она наклонена?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. Гл. VII, §§ 49351.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 65367.*

*3. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. §§ 993104.*

*здл*

# *МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД*

*В механике сплошных сред деформируемые твердые тела, жидко-* сти и газы рассматриваются макроскопически. Это означает, что вся- кий малый объем вещества считается еще настолько большим, что со- держит очень большое число молекул. Такая идеализация позволяет применять эффективные математические методы, разработанные для непрерывных функций.

*Дефuрмации и ннутренние нанрн2Кенин н ,цефuрмируемuм* тнер,цuм теJе. Рассмотрим покоящееся твердое тело, которое не явля- ется абсолютно твердым и может деформироваться, т. е. менять свою форму и объем. В результате деформирования в нем возникают си- лы, стремящиеся вернуть тело в первоначальное состояние. Эти внут- ренние силы, отнесенные к соответствующим площадям, называются

*внутренними напряжениями.*

*Внутренние напряжения обусловлены молекулярными силами, т. е.* силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Радиус действия молекулярных сил порядка межмолекулярных расстояний. Механика сплошных сред, как макроскопическая теория, рассматривает расстоя- ния, большие по сравнению с межмолекулярными. Это значит, что <ра- диус действия> молекулярных сил в механике сплошных сред должен считаться равным нулю. Внутренние силы действуют, следовательно, только через поверхность, т. е. являются поверхностными.

*Пусть при деформировании некоторая точка тела, которая имела* координату *x, смещается на величину s. Если бы смещение было одним* и тем же для всех точек тела, мы получили бы просто параллельный перенос (трансляцию) абсолютно твердого тела. Предположим поэто- му, что в соседней точке с координатой *x* + *dx смещение несколько* отличается от *s и равно s* + *ds. Деформация в точке по определению* равна

*ds*

*ε* = *, dx*

*т. е. деформация есть относительное смещение двух точек, деленное* на первоначальное расстояние между ними. Если расстояние между точками увеличивается, деформация называется растяжением. Если бы расстояние между ними уменьшалось, мы имели бы деформацию сжатия.

*Следует отметить, что направление ds не обязательно должно сов-* падать с направлением *dx. Можно представить себе, например, дефор-* мацию, при которой *ds перпендикулярна dx. Такая деформация так-* же определяется как *ε* = *ds/dx, но называется деформацией сдвига*

*(рис. 3.1).*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |



*растяжение сдвиг*

*\_lис. 3.1. \_lастяжение и сдвиг*

*В действительности возможны также и любые промежуточные на-* правления, и мы должны считать *d-s и d-x векторами. При этом величи-* на *ε устанавливает соотношение между двумя векторами и является* тензором второго ранга. Ее можно представить в виде матрицы *εij с* тремя столбцами и тремя строками.

*Пусть в некоторой декартовой системе координат x, y, z компонен-* ты вектора смещения *-s суть u, v, w, т. е.*

*-s* = *-i u* + *-j v* + *-k w.*

*В теоретических курсах показывается, что при малых деформациях* матрица *εij в индексных обозначениях имеет вид*

*ε* = 1 *∂si* + *∂sj* *i,j* = 1*,* 2*,* 3 (*или x, y, z*)*.*

*ij*

2

*∂xj*

*∂xi*

*Можно видеть, что*

*∂u*

*∂v ∂w*

*εxx* = *εx* = *∂x, εyy* = *εy* = *∂y , εzz* = *εz* = *∂z .*

*Силы, которые производят деформации растяжения (сжатия) и сдви-* га (рис. 3.2), называются растягивающими (сжимающими) и силами сдвига.



*растяжение сдвиг*

*\_lис. 3.2. \_lастяжение и сдвиг*

*Напряжения, соответствующие этим видам сил, определяются как* сила, отнесенная к единице соответствующей площади:

*F*

*σ* = *. S*

*Понятие напряжения имеет перед понятием силы то преимущество,* что его можно установить локально в каждой точке. Оно определя- ется как локальный вектор силы, действующей на единицу площади некоторой воображаемой плоскости внутри тела (рис. 3.3).

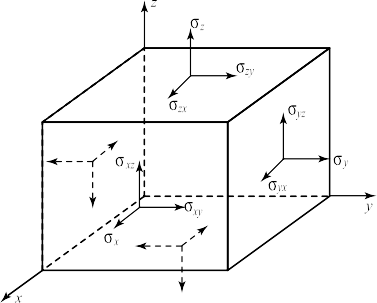
*растяжение сдвиг*

*\_lис. 3.3. Напряжение растяжения и сдвига*

*Вообще говоря, напряжение зависит от ориентации этой плоскости* и опять-таки возможны все промежуточные случаи между чистым рас- тяжением (сжатием) и чистым сдвигом. Поэтому напряжение также является тензором второго ранга, имеет девять компонент и устанав- ливает соотношение между тремя компонентами силы и тремя направ- ляющими косинусами нормали к плоскости, на которую действует эта сила. Рисунок 3.4 разъясняет физический смысл компонент тензора напряжений *σij.*

*На нем изображен бесконечно ма-* лый прямоугольный параллелепипед, мысленно выделенный в рассматри- ваемом теле, и силы, отнесенные к единице площади, действующие на его соответствующие грани.

*Обратим внимание на то, что те-* ло, находящееся под действием растя- жения, будет покоиться (см. рис. 3.2), в то время как при действии напря- жений сдвига оно уже покоиться не будет, а будет вращаться как целое в направлении против часовой стрел-



*\_lис. 3.4. Kомпоненты тензора напряжений*

*ки. Для того чтобы тело не вращалось, на него должна действовать* другая пара сил в противоположном направлении. Это условие можно выполнить, если вторая пара напряжений сдвига действует на верх- нюю и нижнюю грани параллелепипеда, изображенного на рис. 3.2. Таким образом, внутри тела, находящегося в равновесии, на соответ- ствующих перпендикулярных плоскостях напряжения сдвига должны быть равными. Обращаясь к рис. 3.4, мы видим, что должны выпол- няться равенства

*σzy* = *σyz, σxy* = *σyx, σxz* = *σzx,*

*т. е. тензор напряжений является симметричным. В результате этого* ограничения только шесть из девяти компонент тензора напряжений должны быть независимыми. Заметим, что тензор деформаций сим- метричен по определению. Таким образом, для описания равновесного состояния деформированного твердого тела необходимо задать 12 неза- висимых переменных.

*Мu,цуJи унру'uсти. Как известно, уравнение состояния газа при дан-* ной температуре устанавливает связь между давлением *P и объемом*

*V . В рассматриваемых нами случаях растяжения (сжатия) и чисто-* го сдвига роль уравнения состояния должна играть связь между *σ и* *ε. Это соотношение на основе эмпирических данных записывается в* следующем виде: для растяжения (сжатия) стержня

*σ* = *Eε, (3.1)*

*для сдвига*

*σ* = *Gε* = *Gγ, (3.2)*

*где γ - угол сдвига (см. рис. 3.1).*

*Величина E называется модулем Юнга, а G - модулем сдвига.* Опыт показывает, что в довольно широком интервале величины *E и* *G не зависят от напряжения. Модули упругости E и G характеризуют* упругие свойства материала твердого тела в области линейной зависи- мости напряжений и деформаций.

*В общем случае, для кристаллов, связь между напряжением и де-* формацией определяется с помощью тензора четвертого ранга, имею- щего 81 компоненту и устанавливающего соотношения между девятью компонентами тензора напряжений и девятью компонентами тензора деформаций, по аналогии с (3.1) и (3.2). Поскольку только шесть ком- понент тензора напряжений и деформаций независимы, имеется толь- ко 36 модулей упругости. В действительности число независимых мо- дулей меньше в силу той или иной симметрии кристаллов (от 21 до 3). Речь идет, конечно, о монокристаллах. Поликристаллические тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела. Это обусловлено тем, что в механике сплошных сред мы интересуемся деформациями в участках, больших по сравнению с размерами кристаллитов. Изотропное тело, как и поликристалл, характеризуется двумя независимыми модулями упругости.

*Дефuрмацин и нанрн2Кение н бруске. Пусть однородное изотроп-* ное тело имеет форму параллелепипеда. Перпендикулярно к его про- тивоположным граням к телу приложены силы *Fx, Fy, Fz (рис. 3.5).* Соответствующие им напряжения обозначим *σx, σy, σz. Определим* деформации, которые возникают под действием этих сил. Полагая де-

*формации малыми, воспользуемся принципом суперпозиции малых де-* формаций.

*Направим координатные оси параллельно ребрам параллелепипеда.*

*Пусть lx, ly, lz - длины этих ребер.*

*Если бы действовала только сила Fx, то ребро lx получило бы при-* ращение ∆1*lx, определяемое соотношением*

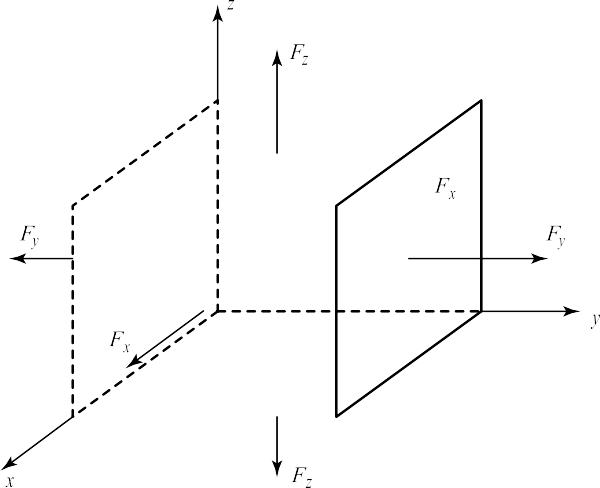
∆1*lx* = *σx .*

*lx E*

*Если бы действовала только сила Fy, то размеры бруска, перпендику-* лярные к оси *y, сократились бы. В частности, ребро lx при этом полу-* чило бы отрицательное приращение ∆2*lx, которое можно вычислить* по формуле

∆2*lx* = −*µσy ,*

*lx E*



*\_lис. 3. . Деформация бруска*

*где µ называется коэффициентом Пуассона. Модуль Юнга и коэффи-* циент Пуассона *µ полностью характеризуют упругие свойства изотроп-* ного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через *E и µ. Относительное приращение ребра lx под действием только* одной силы *Fz было бы равно*

∆3*lx* = −*µσz .*

*lx E*

*Если все силы действуют одновременно, то согласно принципу супер-* позиции малых деформаций результирующее удлинение ребра *lx будет* равно

∆*lx* = ∆1*lx* + ∆2*lx* + ∆3*lx.*

*Аналогично вычисляются удлинения ребер ly и lz. В результате нахо-* дим

*ε* = *σx* − *µ* (*σ* + *σ* )*,*

*x*

*E*

*E*

*y*

*z*

*ε* = *σy* − *µ* (*σ*

*y*

*E*

*E*

*z*

+ *σ* )*, (3.3)*

*x*

*ε* = *σz* − *µ* (*σ*

*z*

*E*

*E*

*x*

+ *σ* )*.*

*y*

*Эти уравнения называются обобщенным законом Гука.*

*При квазистатическом растяжении бруска вдоль оси x совершается* работа *A*1 = 1 *Sxσx*∆*lx, где Sx* = *lylz - площадь грани, перпендику-* лярной к оси *x. Эту работу можно представить в виде*

2

##### 1

*A*1 = *l*

*l l σ*

∆*lx* = 1 *V σ ε ,*

2 *x y z*

*x lx*

2 *x x*

*V* = *lxlylz - объем бруска. Аналогично,*

##### 1 1

*A*2 = 2 *V σyεy, A*3 = 2 *V σzεz.*

*Сложив эти три работы, находим плотность упругой энергии в бруске:*

##### 1

*wel* = 2 (*σxεx* + *σyεy* + *σzεz*)*. (3.4)*

*С учетом (3.3) выражение (3.4) может быть представлено в виде*

*w* = *σ*2 + *σ*2 + *σ*2 − 2*µ*(*σ σ* + *σ σ* + *σ σ* ) *. (3.5)*

1

*el*

2*E*

*x*

*y*

*z*

*x*

*y*

*y*

*x*

*z*

*x*

*Заметим, что абсолютно твердый брусок (E* → ∞*) не обладает упругой* энергией (*w* → 0*), какие бы силы на него не действовали.*

*Дефuрмацин нсестuрuнне'u с2Катин. Рассмотрим частный случай,* когда все напряжения *σx, σy, σz равны и отрицательны. В этом случае* на брусок со всех сторон действует постоянное давление

*P* = −*σx* = −*σy* = −*σz.*

*Из (3.3) при этом имеем*

*P*

*εx* = *εy* = *εz* = − *E* (1 − 2*µ*)*. (3.6)*

*Взяв логарифмическую производную от обеих частей равенства*

*V* = *lxlylz,*

*получим*

∆*V* = ∆*lx* + ∆*ly* + ∆*ly ,*

*или*

*V lx ly ly*

∆*V*

*V* = *εx* + *εy* + *εz.*

*Формулу (3.6), следовательно, можно представить в виде*

∆*V P*

*где*

*V* = − *K , (3.7)*

*E*

*K* =

##### 3(1 − 2*µ*)

*. (3.8)*

*Постоянная K называется модулем всестороннего сжатия.*

*Выражение (3.5) для плотности упругой энергии приобретает вид*

3(1 − 2*µ*)*P* 2 *P* 2

*wel* =

= *.*

2*E* 2*K*

*Поскольку величина wel существенно положительна, то должно быть*

1 − 2*µ >* 0*,*

*т. е.*

##### 1

*µ < .*

##### 2

*Для горных пород коэффициент Пуассона µ близок к 0,25, для метал-* лов - к 0,3.

*Дефuрмацин u,цнuuснu'u растн2Кенин. Пусть однородный стер-* жень может свободно растягиваться или сжиматься в направлении сво- ей оси, которую мы примем за координатную ось *x. Будем считать, что* поперечные размеры стержня не изменяются, поскольку этому препят- ствует окружающая среда. Форма поперечного сечения стержня не иг- рает роли. Воспользуемся поэтому формулой (3.3). Полагая *εy* = *εz* =

= 0*, получим*

*σy* − *µ*(*σz* + *σx*) = 0*, σz* − *µ*(*σx* + *σy*) = 0*.*

*Отсюда*

*µ*

*σy* = *σz* = 1 − *µσx,*

*σx*

2*µ*2

*Окончательно имеем*

*εx* = *E* 1 − 1 − *µ .*

∆*lx* = *σx , (3.9)*

*где*

*lx E*′

*E*′ = *E*  1 − *µ . (3.10)*

##### (1 + *µ*)(1 − 2*µ*)

*Величину E*′ *принято называть модулем одноосного растяжения.* Взаимuзанисимuсть мu,цуJей унру'uсти. Как отмечалось выше, однородное изотропное упругое тело характеризуется двумя независи- мыми модулями упругости. Это значит, что между введенными здесь постоянными, характеризующими упругие свойства материалов, долж- ны существовать определенные зависимости. Можно показать, что

*E*

*K* = *,*

##### 3(1 − 2*µ*)

*E*′ = *E*  1 − *µ ,*

##### (1 + *µ*)(1 − 2*µ*)

*E*

*G* = *,*

##### 2(1 + *µ*)

′ 4

*E* = *K* + *G.*

##### 3

*Здесь K - модуль всестороннего сжатия, E*′ *- модуль одноосного рас-* тяжения, *µ - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга, G - модуль* сдвига. Таким образом, все константы, характеризующие упругие свой-

*ства однородных изотропных тел, могут быть выражены через E и G.*

*Закuн ПаскаJн. С точки зрения механики сплошных сред жидкости* и газы могут быть определены как среды, в которых при равновесии отсутствуют касательные напряжения. Это означает, что отличны от нуля лишь диагональные компоненты (элементы матрицы) тензора на- пряжений:

*σij* = 0*, если i* l= *j*; *σii* l= 0 (*i, j* = 1*,* 2*,* 3)*.*

*Более того, в силу изотропии жидкости (газа) все диагональные компо-* ненты одинаковы. Таким образом, тензор напряжений жидкости (газа) имеет вид

 

*σij* =

−*P* 0 0

0 −*P* 0 *,*

#### 0 0 −*P*

*где P - давление в данной точке среды.*

*Другими словами, в состоянии равновесия нормальное напряжение* (давление) не зависит от ориентации площадки, на которую оно дей- ствует. Это утверждение составляет содержание так называемого зако- на Паскаля.

*Давление P, существующее в жидкости, обусловлено ее сжатием.* Поскольку касательные напряжения отсутствуют, упругие свойства жидкости (газа) характеризуются лишь одной упругой константой - коэффициентом сжимаемости

1. *dV χ* = − *V dP*

*или обратной ему величиной - модулем всестороннего сжатия*

*dP K* = −*V dV .*

*Предполагается, что температура жидкости (газа) поддерживается по-* стоянной.

*Ураннение БернуJJи. Картина течения жидкости определена, если* для каждой ее частицы известно положение в пространстве в каждый момент времени. По изменению положения во времени можно найти скорость и ускорение частицы. Каждая частица может быть отмечена

*ее координатами x*0*, y*0*, z*0 *в момент времени t*0*. Координаты частицы* в момент времени *t можно найти, если заданы функции*

*x* = *F*1(*x*0*, y*0*, z*0*, t*)*,*

*y* = *F*2(*x*0*, y*0*, z*0*, t*)*,*

*z* = *F*3(*x*0*, y*0*, z*0*, t*)*.*

*Эта система уравнений называется уравнениями Лагранжа, а аргу-* менты функций - переменными Лагранжа. Для полной характеристи- ки состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление, плотность, температуру, которые определяются из законов сохранения импульса и энергии и уравнения состояния.

*Существует и другой способ описания течения, который указыва-* ет, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. Обычно задаются три проекции скорости в зависимости от координат и времени

*u* = *f*1(*x, y, z, t*)*,*

*v* = *f*2(*x, y, z, t*)*,*

*w* = *f*3(*x, y, z, t*)*.*

*Эту систему уравнений называют уравнениями Эйлера. Для опре-* деления траектории какой-нибудь частицы надо проинтегрировать си- стему из трех уравнений:

*dx* = *udt, dy* = *vdt, dz* = *wdt.*

*Так как три постоянные интегрирования можно рассматривать как* координаты частицы в некоторый начальный момент времени, то при- ходим к уравнениям Лагранжа.

*Наглядное представление о мгновенной картине течения жидкости* дают так называемые линии тока, касательные к которым указывают направление вектора скорости в точках касания. При установившемся течении, когда картина течения со временем не изменяется, линии тока совпадают с траекториями частиц.

*В случае стационарного течения все частицы жидкости, проходя-* щие через некоторую точку пространства, будут двигаться в дальней- шем по одной и той же линии. Область течения, границами которой являются линии тока, называется трубкой тока. Для вывода уравне- ний, описывающих течение, удобно рассмотреть трубку тока с очень малой площадью поперечного сечения. Малость определяется тем, что можно пренебречь изменением параметров течения поперек трубки то-

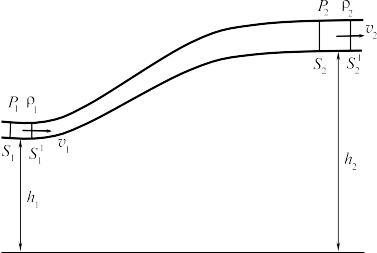
*ка. Обозначая плотность жидкости ρ, скорость течения v и площадь* сечения трубки тока *S, для расхода q жидкости, то есть массы жидко-*

*сти, проходящей через данное сечение за единицу времени, получаем*

*q* = *ρvS. (3.11)*

*Из закона сохранения массы жидкости, протекающей по трубке тока,* для различных сечений одной и той же трубки тока имеем

*ρ*1*v*1*S*1 = *ρ*2*v*2*S*2*. (3.12)*



*\_lис. 3.6. K выводу уравнения*

*.1ернулли*

*В законе сохранения энергии бу-* дем учитывать изменение кинетиче- ской и потенциальной энергии жид- кости за счет работы сил давления, но не будем учитывать изменение теп- ловой энергии, связанное со сжимае- мостью, вязкостью и теплопроводно- стью. Жидкость, при течении кото- рой можно пренебрегать вязкостью и теплопроводностью, называется иде- альной. На рис. 3.6 представлен раз- рез участка трубки тока вертикаль-

*ной плоскостью, то есть плоскостью, в которой лежит сила тяжести.* На рисунке указаны высоты, на которых находятся сечения 1 и 2, и соответствующие параметры течения. За бесконечно малое время *dt* *частицы жидкости смещаются на бесконечно малое расстояние vdt.*

*Частицы жидкости, находившиеся в сечении S*1*, перейдут в сечение*

*S*1*, а частицы из S*2 *- в S*1*. Из-за малости смещений изменением ве-*

1 2

*личин площадей при смещении пренебрегаем. Работа сил давления по*

*перемещению массы жидкости, находящейся между сечениями S*1 *и* *S*2*, складывается из положительной работы p*1*S*1*v*1*dt и отрицательной* (сила направлена против перемещения) работы *p*2*S*2*v*2*dt. При подсчете* изменения потенциальной и кинетической энергии учтем, что энергия жидкости, находящейся между сечениями *S*1 *и S*2*, не меняется, а изме-* нение связано как бы с переходом массы, находившейся между сечени- ями *S*1 *и S*1*, dm* = *ρ*1*S*1*v*1*dt* = *ρ*2*S*2*v*2*dt в положение между сечениями* *S*2 *и S*1*. Используя закон сохранения массы в выражении для работы* сил давления и приравнивая эту работу изменению потенциальной и кинетической энергии, имеем

1

1

2

2

1

*p*1

− *ρ*

*ρ*

1

*p*2

2

*v*2 − *v*2

2

*Отсюда получаем уравнение Бернулли:*

*dm* = *dm*

*g*(*h*2 − *h*1) +

*. (3.13)*

*v*2 *p*1

1

+ *gh*1 +

1. *ρ*1

*v*2 *p*2

= + *gh*2 +

2

1. *ρ*2

= const*. (3.14)*

*Сжимаемость жидкостей при нормальных условиях обычно мала.* Например, для воды увеличение плотности на 1% требует давления более 200 атмосфер (такое давление создается на глубине 2 км), а для увеличения плотности на 10% - свыше 3000 атмосфер. Поэтому при небольших давлениях воду считают несжимаемой жидкостью. Тогда вместо (3.12) и (3.14) можно написать

*v*1*S*1 = *v*2*S*2*, (3.15)*

*ρv*2 *ρv*2

*p*1 + 1 + *ρgh*1 = *p*2 + 2 + *ρgh*2*. (3.16)*

##### 2 2

*С помощью уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости (3.16)* можно получить формулу Торричелли для скорости истечения струи жидкости из отверстия в сосуде. Считаем, что площадь отверстия на- много меньше площади свободной поверхности жидкости в сосуде, то есть скоростью жидкости на свободной поверхности можно пренебречь по сравнению со скоростью истечения жидкости из отверстия. Струе жидкости, вытекающей из отверстия, соответствует трубка тока, на- чинающаяся на свободной поверхности. Давление в вытекающей струе равно атмосферному, так как граница струи, вытекающей в атмосферу,

*неподвижна, т. е. на нее не действует сила. На свободной поверхности* жидкости давление тоже равно атмосферному. Если отверстие нахо- дится ниже свободной поверхности жидкости на *h, то из (3.16) для* скорости истечения струи получаем

*v* = 2*gh. (3.17)*

*Отметим, что величина скорости не зависит от ее направления (от* направления нормали к площади отверстия). Величина *ρv*2*/*2 *называ-* ется скоростным напором или динамическим давлением и равна объ- ёмной плотности кинетической энергии. Из (3.17) следует, что она рав- на гидростатическому давлению *ρgh. Полное давление в неподвижной* жидкости на этой глубине в покоящейся жидкости получим, если до- бавим атмосферное давление.

*ФuрмуJа ПуазейJн. В соответствии с уравнением Бернулли при ста-* ционарном течении по прямолинейной горизонтальной трубе постоян- ного сечения давление жидкости должно быть одним и тем же по всей длине трубы. В действительности, однако, давление жидкости в тру- бе падает в направлении ее течения. Для обеспечения стационарности течения необходимо поддерживать на концах трубы постоянную раз- ность давлений, уравновешивающую силы внутреннего трения, кото- рые возникают при течении жидкости.

*Рассмотрим две параллельные пластины, между которыми нахо-* дится слой жидкости. Для поддержания равномерного движения пла-

*стин необходимо к одной из них приложить силу F- , а к другой - силу*

*F- . Еще Ньютоном экспериментально было установлено, что величина*

−

*этих сил*

*F* = *ηS v*2 − *v*1 *, (3.18)*

*h*

*где S - площадь пластины, h - расстояние между пластинами, v*1*,* *v*2 *- скорости пластин, η - коэффициент вязкости (сокращенно его* называют просто вязкостью).

*Сила трения между слоями вязкой жидкости зависит от измене-* ния скорости в перпендикулярном потоку направлении (закон Ньюто- на для вязкой жидкости):

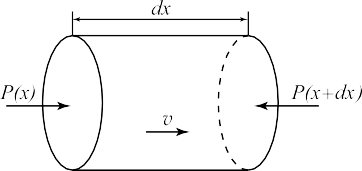
*F* = *Sη dvx . (3.19)*

*dy*

*Пусть вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной* цилиндрической трубы радиусом *R. Координатную ось x направим* вдоль оси трубы в сторону течения. Выделим в трубе произвольную

*бесконечно короткую цилиндрическую часть длиной dx и радиусом r*

*(рис. 3.7).*

*На боковую поверхность выделен-* ного цилиндра в направлении, проти- воположном движению, действует ка- сательная сила вязкого трения:

*dv*

*dF* = 2*πrη*

*dx.*

*dr*

*На основания цилиндра в направле-* нии движения действует сила разности давлений:

*\_lис. 3.7. K выводу формулы 11уазейля*

*dF*1 = *πr*2 *P* (*x*) *P* (*x* + *dx*) = *πr*2 *dP dx.*

( − ) −

*dx*

*Линии тока рассматриваемого течения параллельны, площадь сечения* трубок тока остается постоянной, и из (3.15) получаем, что при стацио- нарном течении ускорение выделенного объёма жидкости должно быть равно нулю. Следовательно, должна быть равна нулю сумма действу- ющих на этот объём сил:

*dF* + *dF*1 = 0*.*

*Отсюда следует, что*

*dv dP*

2*η* = *r*

*dr dx*

*. (3.20)*

*Так как скорость v, а с ней и dv/dr не зависят от x, производная*

*dP/dx в (3.20) должна быть постоянной, равной*

*P*2 − *P*1 *,*

*l*

*где P*1 *- давление на входе трубы, P*2 *- давление на выходе трубы.* В результате имеем

*dv* = − *P*1 − *P*2 *r. (3.21)*

*dr*

*Интегрируя, находим*

2*ηl*

*v* = *P*1 − *P*2 *r*2 + *C.*

−

4*ηl*

*Постоянную интегрирования определяем из условия прилипания жид-* кости к стенке трубы:

*v*(*R*) = 0*.*

*Это дает*

*v* = *P*1 − *P*2 (*R*2 *r*2)*.*

4*ηl*

−

*Скорость v максимальна на оси трубы, где она достигает значения*

*v*0 = *P*1 − *P*2 *R*2*.*

4*ηl*

*При удалении от оси скорость меняется по параболическому закону.* Определим расход жидкости, т. е. количество жидкости, протекаю-

*щее в единицу времени через поперечное сечение трубы. Масса жид-*

*кости, протекающая в единицу времени через кольцевую площадку с* внутренним радиусом *r и внешним r* + *dr, равна dQ* = 2*πrdr ρv. Под-* ставляя сюда выражение для скорости и интегрируя от нуля до *R,* находим искомый расход жидкости:

·

*или*

*Q* = *πρ*

1

2*ηl*

*P* − *P*  *R*

(*R*2 − *r*2)*r dr,*

0

2

*Q* = *πρ P*1 − *P*2 *R*4*. (3.22)*

8*ηl*

*Таким образом, расход жидкости пропорционален разности давлений,* четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине тру- бы и коэффициенту вязкости жидкости. Эти закономерности экспери- ментально установил Пуазейль. Формулу (3.22) поэтому принято назы- вать формулой Пуазейля, хотя сам Пуазейль не является ее автором. На практике расход жидкости удобно измерять в единицах объема жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение.

*Формула (3.22) при этом имеет вид*

*πR*4

*QV* = 8*ηl* (*P*1 − *P*2)*. (3.23)*

*В таком виде формула используется в лабораторной работе 1.3.3.*

*Течение несжимаемой вязкой жидкости в общем случае описывает-* ся уравнением Навье-Стокса:

*∂-v*

*∂-v*

*∂-v*

*∂-v* 1 *η*

*∂t* + *vx ∂x* + *vy ∂y* + *vz ∂z* = − *ρ* grad*P* + *ρ* ∆*-v. (3.24)*

*Здесь*

*- ∂P*

*- ∂P*

*- ∂P*

*∂*2*-v*

*∂*2*-v*

*∂*2*-v*

grad*P* = *i ∂x* + *j ∂y* + *k ∂z ,* ∆*-v* = *∂x*2 + *∂y*2 + *∂z*2 *.*

*Это уравнение можно привести к безразмерному виду, если ввести ха-* рактерный размер течения *L и характерную скорость u. Роль каждого* члена в таком уравнении определяет коэффициент, стоящий перед ним. Роль члена, учитывающего вязкость, по сравнению с членами в левой стороне, учитывающими инерционность, определяется величиной так называемого числа Рейнольдса:

*Re* =

*ρLu*

*.*

*η*

*При больших числах Рейнольдса коэффициент перед членом, опреде-* ляющим влияние вязкости, мал, и вязкостью можно пренебречь. Число Рейнольдса определяет также переход вязкого ламинарного течения в турбулентное.

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. Гл. Х и ХII.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8.*

## *Рабuта 1.3.1*

### *Определение модуля Юнга на основе* исследования деформаций растяжения и изгиба

*Цель работы: экспериментально получить зависимость между на- пряжением и деформацией (закон Гука) для двух простейших напря- женных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба, по результатам измерений вычислить модуль Юнга.*

*В работе используются: в первой части - прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная труба со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка, во второй части - стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линейка, штангенциркуль.*

*В первой части работы производят растяжение проволоки, и это* соответствует случаю одноосного напряженного состояния, описывае- мого формулой (3.1). Во второй части работы измерения производят

*при изгибе балки, которую иногда будем называть бруском, а иногда -* стержнем. Связь между прогибом балки и величиной силы, приложен- ной посредине между точками опор балки, может быть выражена че- рез модуль Юнга. Это позволяет по измерениям приложенных сил и прогибов определить модуль Юнга.

### *1. Определение модуля Юнга по измерениям* растяжения проволоки

*Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова,* схема которого изображена на рис. 1. Верхний конец проволоки П, из- готовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний - к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг *r, связанный с зеркальцем* З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу по- ворота зеркальца.

*Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с пло-* щадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исклю- чить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

*При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока* П при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказаться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Про- волока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Определите площадь поперечного сечения проволоки. Для этого из-* мерьте ее диаметр микрометром не менее чем в десяти местах и во взаимно перпендикулярных направлениях в каждом месте. При изме- рении следите, чтобы микрометр не деформировал проволоку. В даль- нейших расчетах надо пользоваться средним значением диаметра, вы- численным по всем измерениям.

*2. Измерьте длину проволоки.*

*3. Направьте зрительную трубу на зеркальце З. При этом в трубу должно* быть четко видно отражение шкалы в зеркальце. Формулу, связываю- щую число делений по шкале *n, расстояние h от шкалы до зеркальца,* длину рычага *r и удлинение проволоки* ∆*l, выведите самостоятельно.* Длина рычага *r указана на приборе, а расстояние h следует измерить.*

*4. Необходимо позаботиться о том, чтобы в процессе эксперимента не* выйти за пределы области, где удлинение проволоки пропорционально



*\_lис. 1. 11рибор lермантова*

*ее натяжению (область пропорциональности). Для этого прежде всего* оцените максимальную величину нагрузки, приняв, что разрушающее напряжение равно 900 Н/мм2*. Рабочее напряжение не должно превы-* шать 30% от величины разрушающего. Проверьте правильность сде- ланной оценки. Для этого нагрузите проволоку одним из имеющихся грузов, затем уберите его и посмотрите, вернулась ли длина проволо- ки к первоначальному значению. Повторите этот эксперимент с дву- мя, тремя и т. д. грузами, постепенно доходя до расчетной нагрузки. Если остаточные деформации станут заметными, дальнейшее увели- чение нагрузки следует прекратить. При изменении нагрузки на про- волоке каждый раз необходимо предварительно арретировать прибор (на рис. 1 арретир не показан).

*5. Снимите зависимость удлинения проволоки, то есть числа делений n* *по шкале, от массы грузов m при увеличении и уменьшении нагрузки.* Повторите этот эксперимент 2-3 раза.

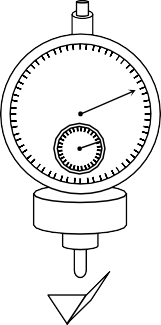
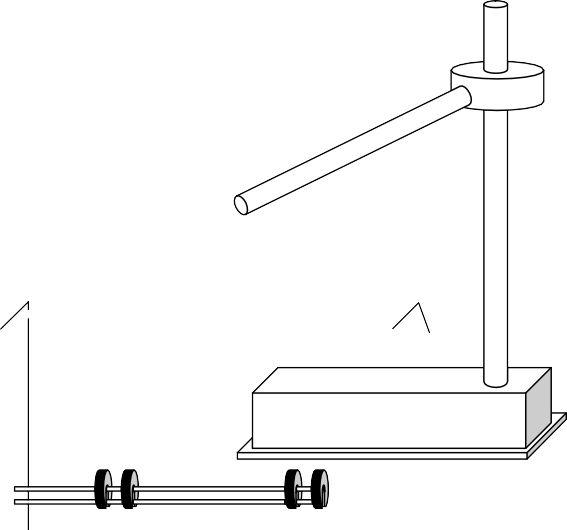
*6. По полученным результатам постройте график зависимости удлинения* проволоки ∆*l от нагрузки P. В недеформированном состоянии прово-* лока, как правило, изогнута, и при малых нагрузках её <удлинение> определяется не растяжением, а выпрямлением. Поэтому на начальном участке зависимости ∆*l*(*P* ) *(при малых P) удлинение растёт довольно* быстро, и только затем точки начинают ложиться на прямую, не про- ходящую, однако, через начало координат. По наклону этой прямой можно определить жёсткость проволоки *k, а по ней - модуль Юнга.* Начальный участок зависимости ∆*l*(*P* ) *из обработки следует исклю-* чить.

*7. По найденной графически жёсткости проволоки k определите модуль* Юнга *E. Оцените погрешности определения k и E.*

*8. Определите материал проволоки, сравнивая полученное значение мо-* дуля Юнга с табличными значениями.

### *11. Определение модуля Юнга по измерениям* изгиба балки

*Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорны-* ми призмами А и Б (рис. 2). На ребра призм опирается исследуемый стержень (балка) В. В середине стержня на призме Д подвешена пло- щадка П с грузами. Измерять стрелу прогиба можно с помощью инди- катора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого ци- ферблата.



*\_lис. 2. Cхема установки для измерения модуля Юнга*

*Модуль Юнга E материала стержня связан со стрелой прогиба* *ym x (то есть с перемещением середины стержня) соотношением (20)* (см. с. 192):

*Pl*3

*E* = 4*ab*3*y .*

*m x*

*Здесь P - нагрузка, вызывающая прогиб стержня, l - расстояние* между призмами А и Б, *a и b - ширина и высота сечения стержня.*

*Чтобы исключить ошибки, возникающие вследствие прогиба сто-* ла при изменении нагрузки на стержень, грузы перед началом экспе- римента следует расположить на рейке над нижней полкой опорной стойки.

*Формула (20) была выведена при условиях, что, во-первых, реб-* ра опорных призм А и Б находятся на одной горизонтали (высоте) и, во-вторых, сила *P приложена точно посередине балки. Читателю* рекомендуется самостоятельно выяснить, существенно ли изменится формула (20), если эти условия будут нарушены в пределах точности проведения эксперимента.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Измерьте расстояние между ребрами призм А и Б.*

*2. Определите ширину и толщину балки (стержня). Для этого измерьте* указанные параметры не менее чем в десяти различных местах. По ним вычислите средние значения, которые будут использованы в даль- нейших расчетах.

*3. Исследуемую балку положите на стойку. Установите индикатор в цен-* тре балки и снимите зависимость стрелы прогиба *y*max *от величины* нагрузки *P. Измерения проделайте при возрастании и убывании на-* грузки. Проверьте, возвращается ли балка в первоначальное положе- ние после снятия нагрузки.

*4. Исследуйте, насколько существенна зависимость результата от поло-* жения точки приложения изгибающей силы *P. Для этого сместите* призму Д на 2-3 мм от точки, принятой за середину балки, и вновь измерьте стрелу прогиба. Эту величину сравните с результатом, полу- ченным при положении призмы Д посередине балки.

*5. Переверните балку таким образом, чтобы при нагружении она изгиба-* лась в противоположную сторону, и повторите измерения. Сравните результаты с предыдущими.

*6. Аналогичные измерения проведите для двух-трех балок, изготовлен-* ных из дерева, и одной металлической.

*7. Для каждого образца постройте график <нагрузка - прогиб> при уве-* личении и уменьшении нагрузки. По наклону графиков определите средние значения модулей Юнга.

*8. Оцените погрешности результатов измерений и сравните полученные* модули Юнга с соответствующими табличными значениями.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Какие основные источники погрешностей измерений? Каким образом можно уменьшить погрешности?*

*2. Оцените максимальную точность, с которой при данных условиях целесооб- разно измерять удлинение проволоки и стрелу прогиба бруска.*

*3. В чем различие между одноосным напряженным состоянием и одноосным деформируемым состоянием?*

*4. При каких напряжениях и относительных деформациях выполняется закон Гука?*

*5. Какие отклонения от закона Гука возможны при деформировании твердых тел?*

*6. Что такое коэффициент Пуассона?*

*7. Какие предположения сделаны, чтобы получить связь максимального про- гиба балки с модулем Юнга?*

*8. Какой зависимостью y*(*x*) *описывается форма средней линии балки при чи- стом изгибе?*

*9. Для чего в приборе Лермантова нужна площадка М?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 75380.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.1, 8.2.*

*3. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 81, 82, 87, 88.*

*4. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. §§ 1053108.*

### *Приложение*

*На рис. 3а показана балка, деформированная под действием силы P,*

*приложенной посредине между опорами А и Б. Со стороны опор на балку в точках А и Б действуют силы P/*2*. Деформация балки происходит таким образом, что продольные слои в верхней ее части оказываются сжатыми, а в нижней - растянутыми. Можно считать, что абсолютные величины на- пряжений по слоям растут пропорционально расстоянию от средней линии балки, как показано стрелками на рис. 3б для выделенного элемента балки. Так как средняя часть элемента не напряжена, то длина средней линии эле- мента dl*0 *при деформации не меняется (так же, как и длина средней линии всей балки). Такое напряженное состояние балки называется чистым изги- бом. Считаем, что напряжения в слоях связаны с их деформацией законом Гука:*

*σ* = *E dl* − *dl*0 *. (1)*

*dl*0

*В выделенном на рис. 3в элементе балки наклон средней линии на ее длине dl*0 *меняется от α до α*−*dα. Длину дуги можно выразить через радиус ее кривизны R:*

*dl*0 = −*Rdα. (2)*

*Знак минус здесь потому, что R мы считаем положительным, а угол наклона средней линии балки в выбранных на рис. 3а координатах уменьша- ется по длине балки (как это показано на рис. 3в). Если y*(*x*) *- зависимость, описывающая форму средней линии балки в выбранной системе координат x, y (обратим внимание, что ось y направлена на рисунке вниз), то угол наклона средней линии определяется выражением*

*dy*(*x*) = tg *α. (3)*

*dx*

*Длину средней линии малого элемента балки можно выразить следующим образом (см. рис. 3г):*

*dl*0 =

* (*dx*)2 + (*dy*)2 = *dx*

/1 +

*dy* 2

*dx*

( )

*. (4)*







*\_lис. 3. Изгиб балки*



*Из этого же треугольника*

*dx* = cos *α. (5)*

*dl*0

*Дифференцируя (3) по x и пользуясь (2), получаем*

*d*2*y*

1 *dα*

( *dl*0 )2 *dα dl*0

*dx*

( *dl*0 )3 1

*dx*

*Отсюда и из (4) следует*

*dx*2 = cos2 *α dx* =

*dl*0 *dx* = −

*R. (6)*

1

*y*′′

*R* = −(1 + *y*′2)3*/*2 *. (7)*

*Напряжение в продольном слое, находящемся на расстоянии ξ от средней линии балки (см. рис. 3в) и описываемое формулой (1), можно представить следующим образом:*

*σ* = *E dl* − *dl*0 = *E ξ. (8)*

*dl*0 *R*

*Здесь использовано соотношение, следующее из подобия треугольников на рис. 3в:*

*dl* − *dl*0 = *dl*0 *. (9)*

*ξ R*

*Сумма сил упругости, действующих в сечении балки, равна нулю, по- этому их суммарный момент не зависит от положения точки, относительно которой он вычисляется. Выберем эту точку на средней линии балки. Полу- чаем*

*b/*2

*M* =

−*b/*2

*ξσ dS* = *E*

*R*

*b/*2

−*b/*2

2

*ξ dS* =

*E I, (10)*

*R*

*где dS* = *adξ, a - ширина, b - высота поперечного сечения балки (см. рис. 3д). I называют моментом инерции поперечного сечения балки отно- сительно оси, проходящей через среднюю линию балки. Из рис. 3б видно, что для части балки (от x* = 0 *до x) равновесие обеспечивается равенством сил, приложенных в точке опоры и в рассматриваемом сечении, а также равенством моментов этих сил и момента, определяемого формулой (10). Равенство моментов дает*

*EI* = *xP . (11)*

*R* 2

*Теперь, используя (7), можно написать уравнение, определяющее форму средней линии балки:*

*При малых прогибах*

*y*′′ = −

(1 + *y*

′2)3*/*2 *P*

2*EI*

*x. (12)*

*y*′2 ≪ 1*. (13)*

*В этом случае из (12) следует*

*y*′′ = *P x. (14)*

−

2*EI*

*Интегрируя это уравнение, получаем*

*y*′ = *P x*2

−

4*EI*

+ *C.*

*(15)*

*Здесь C - постоянная, которая определяется из условия симметрии прогиба балки y*′ = 0 *при x* = *l/*2*. Из (15) следует*

)

*y*′ = −

*P*

4*EI*

2 *l*2

*x*

(

−

4

*. (16)*

*Интегрируя еще раз и учитывая, что при x* = 0 *также и y* = 0*, получаем уравнение средней линии балки:*

*Px* 2

*y* = 48*EI* (3*l* −

2

4*x* )*.*

*(17)*

*Максимальный прогиб балки, который определяется величиной y при*

*x* = *l/*2*, равен*

*Pl*3

*ymax* = 48*EI . (18)*

*В случае прямоугольного сечения балки*

*b/*2

*I* =

−*b/*2

2

*ξ dS* = *a*

*b/*2

2

*ξ*

−*b/*2

*dξ* =

*ab*3

12

*. (19)*

*Из (18) и (19) для модуля Юнга получаем*

*Pl*3

*E* = 4*ab*3 *y*

*max*

*. (20)*

## *Рабuта 1.3.2*

### *Определение модуля кручения*

*Цель работы: измерение углов закручивания в зависимости от при- ложенного момента сил, расчет модулей кручения и сдвига при стати- ческом закручивании стержня, определение тех же модулей для про- волоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенно- го на ней маятника (динамическим методом).*

*В работе используются: в первой части: исследуемый стержень, отсчетная труба со шкалой, рулетка, микрометр, набор грузов, во второй части: проволока из исследуемого материала, грузы, секундо- мер, микрометр, рулетка, линейка.*

*При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения рас-* пределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение по- ворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с тех радиальных линий, на которых они находились вначале, и все эти ра- диальные линии поворачиваются на один и тот же угол. Напряженное состояние, которое при этом возникает, называется чистым кручением. Далее будет показано, что касательные напряжения в поперечном се- чении увеличиваются пропорционально расстоянию от оси вращения. Рассмотрим часть закручиваемого круглого цилиндра, имеющую длину *l, которая изображена на рис. 1а. Любая прямая линия, про-* веденная до закручивания цилиндра по частицам материала и парал- лельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию). Сечения, находящиеся на расстоянии *l, повернуты*

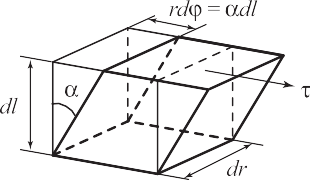
*на угол ϕ.*

*Для вывода основных соотношений, описывающих кручение, удоб-* но рассмотреть в цилиндре колечко произвольного радиуса *r с беско-* нечно малой толщиной *dr и бесконечно малой высотой dl, показанное* на рис. 1б. При закручивании верхнее сечение колечка поворачивается относительно нижнего на угол *dϕ, а образующая цилиндрической по-* верхности колечка *dl наклоняется на угол α, представляя элемент тех* спиральных линий, о которых говорилось выше. При небольших углах *α можно написать*

*αdl* = *rdϕ. (1)*

*Видно, что α возрастет с увеличением расстояния от оси цилиндра r.* На рис. 1в показан элемент колечка, в котором происходит сдвиговая

*\_lис. 1. Закручивание цилиндра*



*деформация. Касательное напряжение τ связано с углом сдвига α ли-* нейной зависимостью, в которую входит модуль сдвига *G (см. (3.2)):*

*τ* = *Gα. (2)*

*Касательное напряжение τ пропорционально α и, следовательно, тоже* растет с увеличением расстояния от оси цилиндра, о чем уже говори- лось выше. Используя (1), получаем

*dϕ*

*τ* = *Gr*

*dl*

*. (3)*

*Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси* цилиндра:



*dM* = 2*πrdr* · *τ* · *r. (4)*

*Суммарный момент сил, действующий на всем поперечном сечении* цилиндра, находится интегрированием по колечкам от оси цилиндра

*до его радиуса R:*

*M* = 2*πG*

*dϕ* *R*

*r*3 *dr* = *πG*

*dϕ R*4

*. (5)*

*dl dl* 2

0

*Этот момент не меняется по длине цилиндра. Моменты на торцах лю-* бой выделенной части цилиндра уравновешивают друг друга (нет вра- щения цилиндра). При этом из (5) следует линейная зависимость меж- ду относительным поворотом поперечных сечений цилиндра - углом *ϕ* *и расстоянием l, на котором они находятся. Таким образом, для связи* приложенного момента сил *M и угла поворота ϕ поперечных сечений* цилиндра *ϕ, находящихся на расстоянии l, получаем*

*πR*4*G*

*M* = *ϕ* = *fϕ. (6)*

2*l*

*Здесь введен модуль кручения f, связанный с модулем сдвига G:*

*πR*4*G*

*f* = *. (7)*

2*l*

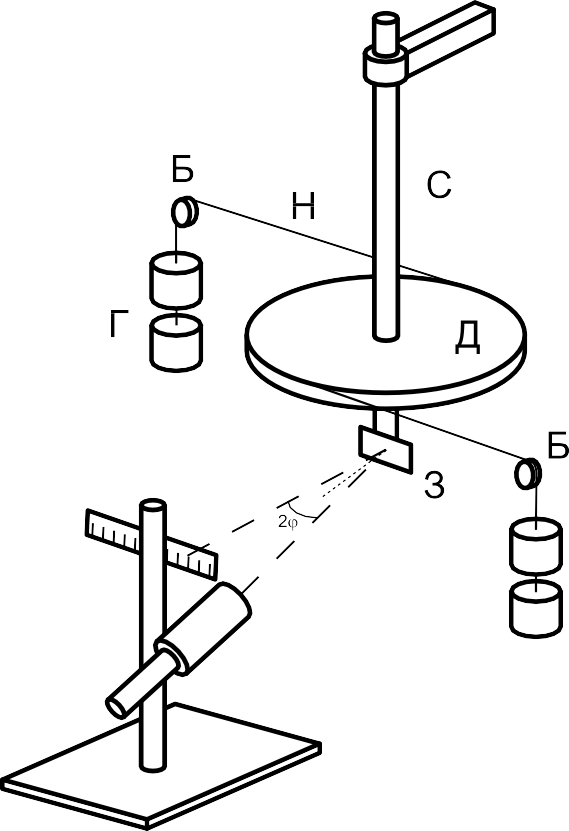
*Необходимо подчеркнуть, что зависимость (6) выполняется при на-* пряжениях намного меньших модуля сдвига, то есть при малых уг- лах *α.*

### *1. Определение модуля кручения стержня* статическим методом

*Схема экспериментальной установки для статического закручива-* ния стержня изображена на рис. 2. Верхний конец вертикально распо- ложенного стержня С жестко закреплен на стойке, а нижний соединен с диском Д. Момент *M, закручивающий стержень, создают две нави-* тые на диск и перекинутые через блоки Б нити, к концам которых подвешиваются одинаковые грузы Г. Диск снабжен зеркальцем З. Для определения угла закручивания стержня надо зрительную трубу на- править на зеркальце и добиться того, чтобы в нее было четко видно отражение шкалы, укрепленной на том же штативе, что и труба. Из- мерение смещения изображения шкалы в трубе позволяет определить угол закручивания стержня.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Установите зрительную трубу таким образом, чтобы в нее было четко* видно отражение шкалы в зеркальце З. Измерьте расстояние от зер- кальца З до шкалы. Определите диаметры стержня С и шкива Д.



*\_lис. 2. Cхема установки*

*2. Увеличивая нагрузку на нитях Н, снимите зависимость ϕ* = *ϕ*(*M* )*.* Проделайте эксперимент в обратном порядке, постепенно уменьшая ве- личину закручивающего момента. Повторите измерения не менее трех раз.

*3. Результаты эксперимента изобразите графически в координатах (ϕ,* *M). При помощи этих графиков определите величину модуля круче-* ния *f и оцените допущенную при этом погрешность.*

*4. Используя формулу (7), вычислите модуль сдвига G. Сравните полу-* ченное значение с табличным.

### *11. Определение модуля сдвига при помощи* крутильных колебаний

*Экспериментальная установка, используемая в этой части работы,* изображена на рис. 3 и состоит из длинной вертикально висящей прово- локи П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный метал- лический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец прово- локи зажат в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким спо- собом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в про- волоке. Это вращение описывается уравнением (2.35):

*d*2*ϕ*

*I dt*2 = −*M. (8)*

*Здесь I - момент инерции стержня с грузами относительно оси вра-* щения, *ϕ - угол поворота стержня от положения равновесия, M -* момент сил, действующий на стержень при закручивании проволоки, который при малых закручиваниях (малых *ϕ) описывается формулой*

*(6). Вводим обозначение*

*ω*2 = *f . (9)*

*I*

*При этом из (6) и (8) получаем*

*d*2*ϕ* 2

*dt*2 + *ω ϕ* = 0*. (10)*

*Это уравнение гармонических колебаний (4.4). Его решение имеет вид*

*ϕ* = *ϕ*0 sin(*ωt* + *θ*)*. (11)*

*Здесь амплитуда ϕ*0 *и фаза θ определяются начальными условиями.* Период колебаний *T равен*

*T* = 2*π* = 2*π*✓ *I . (12)*

*ω*

*f*

*Уравнение (10) и, следовательно, (11) и (12) получены для неза-* тухающих колебаний. Для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемом случае затуханием колебаний, то есть необрати- мыми потерями энергии, можно пренебречь. Если после 10 периодов



*\_lис. 3. Cхема установки*

*колебаний амплитуда уменьшается меньше, чем в 2 раза, то можно* пользоваться результатами для незатухающих колебаний. Кроме того, следует убедиться, что период колебаний не зависит от начальной ам- плитуды. Начальную амплитуду нужно уменьшать до тех пор, пока не исчезает зависимость периода от амплитуды.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Прежде всего установите диапазон амплитуд, в котором применимы ре-* зультаты, полученные для незатухающих колебаний. Для этого укрепи- те грузы на некотором расстоянии от проволоки и возбудите в системе крутильные колебания. Измеряя время нескольких (не менее десяти) периодов колебаний, найдите период *T*1*. Уменьшив начальную ампли-*

*туду вдвое, тем же способом найдите соответствующий период T*2*. Если*

*T*1 = *T*2*, то для проведения измерений можно выбрать любую ампли-* туду не больше первой. Если же окажется, что периоды не равны, то

*начальную амплитуду следует уменьшать до тех пор, пока не будет* достигнуто равенство этих периодов.

*2. Убедитесь в том, что после десяти периодов колебаний амплитуда* уменьшается меньше, чем в два раза.

*3. Установите грузы на стержне на одинаковом расстоянии l от оси си-* стемы (проволоки) до центра масс каждого груза и измерьте период

*колебаний T . Проведите измерения для 4-6 различных значений l. Ве-* личину модуля кручения можно найти из наклона прямой линии, про-

*веденной по экспериментальным точкам, отложенным в координатах*

*l*2*, T* 2*.*

*4. Измерьте длину и диаметр проволоки П. По найденному модулю кру-* чения с помощью формулы (7) получите модуль сдвига *G, оцените* погрешность и сравните с табличными значениями в справочниках.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Как трение в осях блоков Б влияет на результаты измерений статическим методом? Как можно уменьшить это влияние?*

*2. Как меняется период колебаний при увеличении их затухания?*

*3. Какой метод предпочтительнее на практике: статический или динамиче- ский?*

*4. Как оценить погрешность измерения модуля кручения при определении его из графика в координатах l*2*, T* 2*?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 78,79.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 82, 84, 86.*

## *Рабuта 1.3.3*

### *Определение вязкости воздуха по скорости* течения через тонкие трубки

*Цель работы: экспериментально выявить участок сформированно- го течения, определить режимы ламинарного и турбулентного тече- ния, определить число Рейнольдса.*

*В работе используются: металлические трубки, укрепленные на горизонтальной подставке, газовый счетчик, микроманометр типа ММН, стеклянная U-образная трубка, секундомер.*

*Рассмотрим движение вязкой жидкости или газа по трубке кругло-* го сечения. При малых скоростях потока движение оказывается ла- минарным (слоистым), скорости частиц меняются по радиусу и на- правлены вдоль оси трубки. С увеличением скорости потока движение

*становится турбулентным, и слои перемешиваются. При турбулентном* движении скорость в каждой точке быстро меняет величину и направ- ление, сохраняется только средняя величина скорости.

*Характер движения газа (или жидкости) в трубке определяется без-* размерным числом Рейнольдса:

*Re* =

*vrρ* η

*, (1)*

*где v - скорость потока, r - радиус трубки, ρ - плотность движущейся* среды, *η - ее вязкость. В гладких трубах круглого сечения переход от* ламинарного движения к турбулентному происходит при Re 1000*.*

≈

*При ламинарном течении объем газа V , протекающий за время t*

*по трубе длиной l, определяется формулой Пуазейля (3.23):*

*πr*4

*QV* = 8*lη* (*P*1 − *P*2)*. (2)*

*В этой формуле P*1 *P*2 *- разность давлений в двух выбранных сече-* ниях 1 и 2, расстояние между которыми равно *l. Величину Q обычно* называют расходом. Формула (2) позволяет определять вязкость газа по его расходу.

−

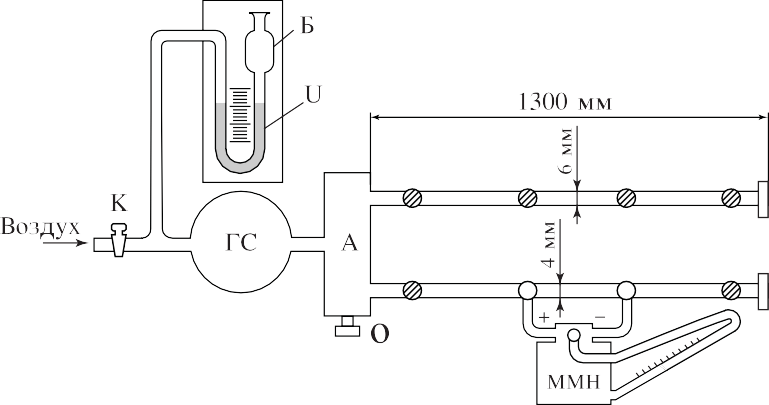
*Отметим условия, при которых справедлива формула (2). Прежде* всего необходимо, чтобы с достаточным запасом выполнялось неравен- ство Re *<* 1000*. Необходимо также, чтобы при течении не происходило* существенного изменения удельного объема газа (при выводе формулы удельный объем считался постоянным). Для жидкости это предположе- ние выполняется практически всегда, а для газа - лишь в тех случаях, когда перепад давлений вдоль трубки мал по сравнению с самим давле- нием. В нашем случае давление газа равно атмосферному (103 *см вод.* ст.), а перепад давлений составляет не более 10 см вод. ст., т. е. менее 1% от атмосферного. Формула (2) выводится для участков трубки, на которых закон распределения скоростей газа по сечению не меняется при движении вдоль потока.

*\_lис. 1. Формирование потока газа в трубе круглого сечения*



*При втекании газа в* трубку из большого резер- вуара скорости слоев внача- ле постоянны по всему сече- нию (рис. 1). По мере про- движения газа по трубке

*картина распределения скоростей меняется, так как сила трения о стен-* ку тормозит прилежащие к ней слои. Характерное для ламинарного течения параболическое распределение скоростей устанавливается на



*\_lис. 2. Cхема установки для определения вязкости воздуха*

*некотором расстоянии a от входа в трубку, которое зависит от радиуса* трубки *r и числа Рейнольдса по формуле*

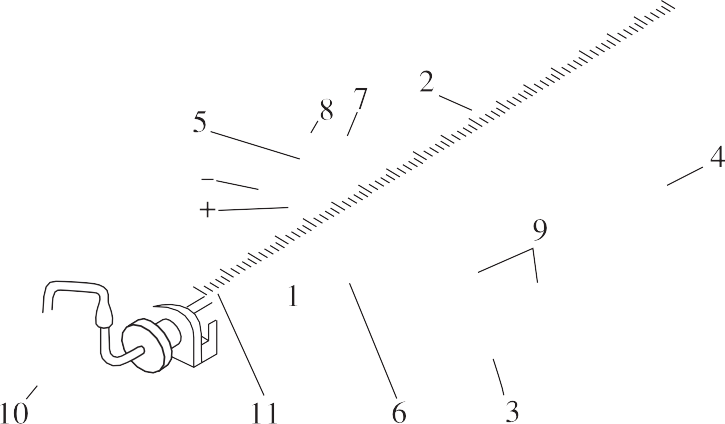
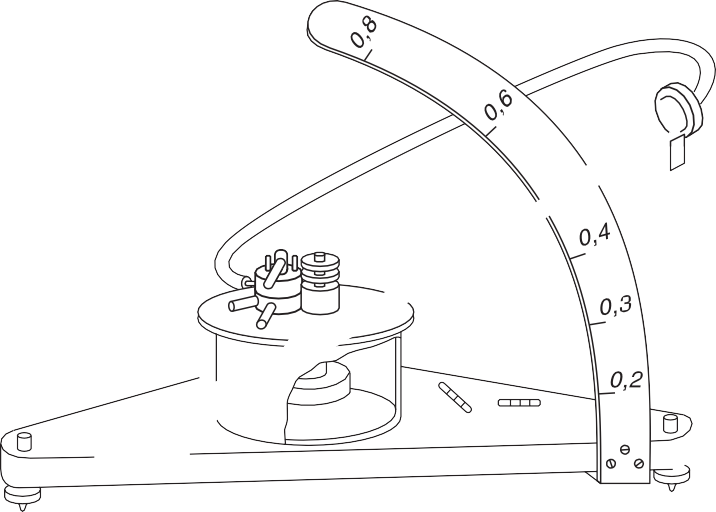
*a* ≈ 0*,*2*r* · *Re. (3)*

*Градиент давления на участке формирования потока оказывается* б,ольшим, чем на участке с установившимся ламинарным течением, что позволяет разделить эти участки экспериментально. Формула (3) дает возможность оценить длину участка формирования.

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Измерения производятся на экс-* периментальной установке, схема которой изображена на рис. 2. По- ток воздуха под давлением, несколько превышающим атмосферное (на 5-7 см вод. ст.), через газовый счетчик ГС поступает в резервуар А, к которому припаяны тонкие металлические трубки. Примерные разме- ры трубок указаны на рисунке (точные размеры обозначены на уста- новке). Обе трубки на концах снабжены заглушками, не пропускаю- щими воздух. Во время измерений заглушка открывается только на рабочей трубке; конец другой трубки должен быть плотно закрыт.

*Перед входом в газосчётчик поставлена U-образная трубка, наполо-*

*вину заполненная водой. Она выполняет две задачи. Первая - изме-* рение давления газа на входе в газосчётчик. Вторая - предохранение газосчётчика от выхода из строя. Дело в том, что газосчётчик устой- чиво работает, если давление газа на его входе не превышает 600 *мм* водяного столба. Высота U-образной трубки примерно 600 мм, поэтому, когда давление на входе в счётчик превышает 600 *мм водяного столба,*



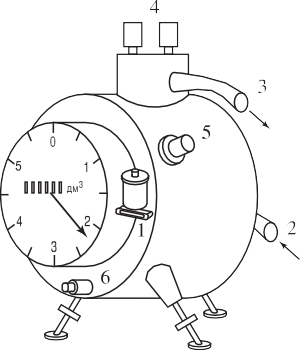
*\_lис. 3. Mикрометрический манометр типа MMН*

*вода из U-образной трубки выплёскивается в защитный баллон Б и,* создавая шум, привлекает к себе внимание экспериментатора. Такая ситуация часто создаётся в тех случаях, когда газ подают в систему при закрытых выходах измерительных трубок.

*Для измерения давлений в трубках просверлен ряд миллиметровых* отверстий. На время опыта к двум соседним отверстиям подсоединяет- ся микроманометр, а остальные плотно закрываются завинчивающи- мися пробками. Подача воздуха в установку регулируется краном К.

*В работе применяется .микро.мано.метр типа ММН (рис. 3), поз-* воляющий измерять разность давлений до 200 мм вод. ст. Для повы- шения чувствительности трубка манометра установлена в наклонном положении. Числа 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 и 0,8, нанесенные на стойке 4, обо- значают коэффициент, на который должны быть умножены показания манометра при данном наклоне, для получения давления в миллимет- рах водяного столба. Рабочей жидкостью является этиловый спирт. Установка мениска жидкости на нуль шкалы производится путем из- менения уровня спирта в сосуде 1 с помощью цилиндра 6. Глубина погружения цилиндра в спирт регулируется винтом 7.

*Микроманометр снабжен двумя уровнями 9, расположенными на* плите 3 перпендикулярно один другому. Установка прибора по уровням производится двумя регулировочными ножками 10.





*\_lис. 4. l:нешний вид газового счетчика*

*\_lис. . Cхема устройства газового счетчика*

*На крышке прибора установлен трехходовой кран 8, который име-* ет два рабочих положения - <0> и <+> (рис. 3). В положении <0> мениск жидкости устанавливается на ноль. В положении <+> произ- водятся рабочие измерения. Перевод из положения <0> в положение

*<+> и наоборот осуществляется с помощью рычажка 5 (рис. 3). При* этом учитывается, что в резервуаре уровень жидкости практически не меняется.

*Газовый с'Чет'Чик служит для измерения небольших количеств газа.* Внешний вид его изображен на рис. 4. Корпус газового счетчика пред- ставляет собой цилиндрический баллон, на передней торцевой стенке которого находятся счетно-суммирующий механизм и шкала со стрел- кой. Один оборот стрелки соответствует 5 л газа, прошедшего через счетчик.

*Газовый счетчик заливается водой до уровня, определяемого по во-* домерному устройству 1. Трубка 2 для входа газа расположена сзади счетчика, а трубка 3 для выхода газа - наверху счетчика. Патрубки 4 предназначены для присоединения U-образного манометра, а патру- бок 5 - для установки термометра. Кран 6 служит для слива воды. Счетчик снабжен уровнем и регулировочными ножками для правиль- ной установки.

*Принцип работы счетчика пояснен на рис. 5. На оси, проходящей* по осевой линии цилиндра, жестко укреплены легкие чаши (для упро- щения чертежа на рисунке изображены только две чаши). В чашу, находящуюся над трубкой 2, поступает воздух. Когда чаша наполня- ется воздухом, она всплывает, ее место занимает следующая, и т. д. Вращение оси передается счетно-суммирующему устройству.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Подготовьте установку к работе: установите приборы по уровням, про-* верьте наличие воды в газовом счетчике по водомерному устройству, установите на нуль мениск микроманометра. Полный объём измерения проведите на одной из трубок (лучше на трубке *d* = 4 *мм).*

*2. По формуле (3) оцените расстояние, на котором происходит формиро-* вание потока при ламинарном течении. Расчет проведите для Re =

##### = 1000*.*

*3. Подсоедините микроманометр к двум соседним выводам выбранной* трубки на участке со сформировавшимся потоком. Отвинтите пробку на конце этой трубки; все остальные выводы на трубках должны быть плотно завинчены пробками, снабженными резиновыми прокладками.

*4. Медленно открывая кран К (рис. 2) и впуская воздух в установку,* внимательно следите за показаниями микроманометра. При больших перепадах давления спирт может вылиться из микроманометра через трубку 11.

*Чаще всего это нежелательное явление происходит при измерени-* ях на тонких трубках. Спирт заливает не только резиновую трубку, соединяющую манометрическую трубку 11 с трёхходовым краном, но может попасть и в трубку, соединённую с (-). В резиновых соединитель- ных трубках остаются капли жидкости, которые приводят к тому, что

∆*P* = *P*1 *P*2 *измеряется неправильно. Поэтому перед измерениями (и*

−

*после того, как спирт попадает в трубки) необходимо убедиться в том,*

*что капелек в соединительных трубках нет. Их присутствие можно об-* наружить по резким скачкам столбика в манометрической трубке 11, происходящим при осторожном перемещении соединительных трубок. В этом случае трубки надо снять и просушить.

*5. Измерьте вязкость воздуха. Для этого снимите зависимость разности* давлений ∆*P от расхода воздуха Q* = ∆*V/*∆*t, при этом* ∆*V измеряется* газовым счетчиком, а ∆*t - секундомером. Установите множитель на* стойке 4 равным 0,2. Начинать надо с малых перепадов давлений (2-3 мм вод. ст.), постепенно увеличивая расход *Q. В диапазоне от 0 до 100* дел. по шкале 2 (рис. 3) должно быть не менее 5-6 точек замера. Это необходимо для того, чтобы заведомо попасть в режим ламинарного течения. После этого замеры можно проводить реже, но в более широ- ком диапазоне по давлению, чтобы попасть в турбулентный режим. По полученным данным постройте график ∆*P* = *f* (*Q*)*. Из формулы (2)* видно, что при ламинарном потоке зависимость ∆*P от Q должна быть* линейной. При возникновении турбулентности линейность графика на- рушается: разность давлений растет быстрее, чем расход.

*6. По угловому коэффициенту прямолинейного участка графика опреде-* лите вязкость воздуха *η. Оцените погрешность определения этого ко-* эффициента и вычислите ошибку полученного значения вязкости.

*7. Вычислите значение числа Рейнольдса Re для переходной области* между ламинарным и турбулентным течениями.

*8. При расходе, заведомо обеспечивающем ламинарность потока, измерь-* те распределение давления вдоль трубки. Для этого микроманометр последовательно подсоедините ко всем ее выводам, включая и вывод

*<0> (рис. 2). Постройте график зависимости давления от длины вдоль* трубки *P* = *f* (*l*)*. Из графика оцените длину участка, на котором про-* исходит установление потока. Сравните найденный результат с резуль- татом, вычисленным по формуле (3).

*9. Для всех трубок на участках со сформированным течением (в конце* трубок) в ламинарном режиме (Re *<* 500*) снимите зависимости Q* =

= *f* (*P* )*. Обработайте результаты по формуле*

8*lηQ π*(*P*1 − *P*2)

= *rn.*

*Постройте график в двойном логарифмическом масштабе, т. е. по оси* ординат отложите ln 8*lηQ/π*(*P*1 *P*2) *, а по оси абсцисс -* ln *r. Нетруд-* но увидеть, что тангенс угла наклона полученной прямой должен дать значение *n, т. е. показатель степени, который по формуле Пуазейля* должен быть равен 4. Проверьте, выполняется ли это. Оцените ошиб- ку измерений.

( − )

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Какой формулой описывается профиль скорости ламинарного потока в труб- ке? Как соотносятся средняя по сечению и максимальная скорости?*

*2. Что такое число Рейнольдса? Как его можно определить из эксперименталь- ных данных?*

*3. Как графически надо обрабатывать результаты измерений по п. 8, чтобы из них достоверно было видно различие участков со сформированным и несформированным течениями?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 96, 97.*

*2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. Гл. XVI, § 125.*

*3. Ландау Л.Д., Ахиезер А.Л., Лифшиц Е.М. Механика и молекулярная физи- ка. - М.: Наука, 1969. Гл. XV, §§ 1173119.*

*4. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. Гл. XII, § 111.*

## *Рабuта 1.3..4*

### *Исследование стационарного потока жидкости* в трубе

*Цель работы: измерить скорости течения по методам Пито и Вен- тури, а также сравнить результаты со скоростью, определенной по расходу воды.*

*В работе используются: расходомерная установка, секундомер.*

*В работе исследуется течение жидкости по трубе постоянного сече-* ния.

*Основной целью исследования потока жидкости или газа в трубе яв-* ляется определение скорости движения и расхода, то есть количества среды, - объема или массы, - протекающей в единицу времени. Пра- вильное определение расхода очень важно в прикладных задачах - в газо- и нефтепроводах, а также в водопроводе и при теплоснабжении. Ввиду важности приложений было разработано много разных спо- собов определения расхода и скорости потока жидкости или газа, но самые простые и в то же время точные основаны на измерении перепа- да давления, связанного либо с положением приемников - навстречу или вдоль потока (как в трубке Пито), либо вызванного специальным препятствием - типа сужения трубы (как в трубке Вентури) или уста-

*новкой внутри трубы шайбы - кольца.*

*Расходомер Вентури (рис. 1) представляет* собой горизонтальную трубу с плавно меняю- щимся сечением. В широком (сечение *S*1*) и уз-* ком (сечение *S*2*) участках сделаны выводы к* трубкам водяного манометра М1*. Высота под-* нятия воды в трубках манометра определяет давление в соответствующих сечениях.



*В силу несжимаемости жидкости (v*1*S*1 =

= *v*2*S*2*) и горизонтальности трубы (z*1 = *z*2*) из*   *уравнения Бернулли (3.14) получаем скорость*

*\_lис. 1. \_lасходомер l:ентури*

*потока в сечении S*1 *через давления в сечениях*

*S*1 *и S*2*:*

*v* = 2(*p*1 − *p*2)

1 ✓

*ρ* [(*S*1*/S*2)2 − 1]

*. (1)*

*Расходомер Пито изображен на рис. 2. С ис-* следуемой трубой Т соединены две трубки во- дяного манометра М2*. Одна из них (1) подве-* дена к стенке трубы Т, а другая (2) изогнута и направлена открытым концом навстречу пото- ку. Перед отверстием трубы 2 жидкость непо- движна, *v*2 = 0*.*

*Пусть давления, измеренные манометриче-* скими трубками 1 и 2, равны *p*1 *и p*2*. Урав-* нение Бернулли (3.14) дает *p*1 + *ρv*2*/*2 = *p*2*,* откуда

1



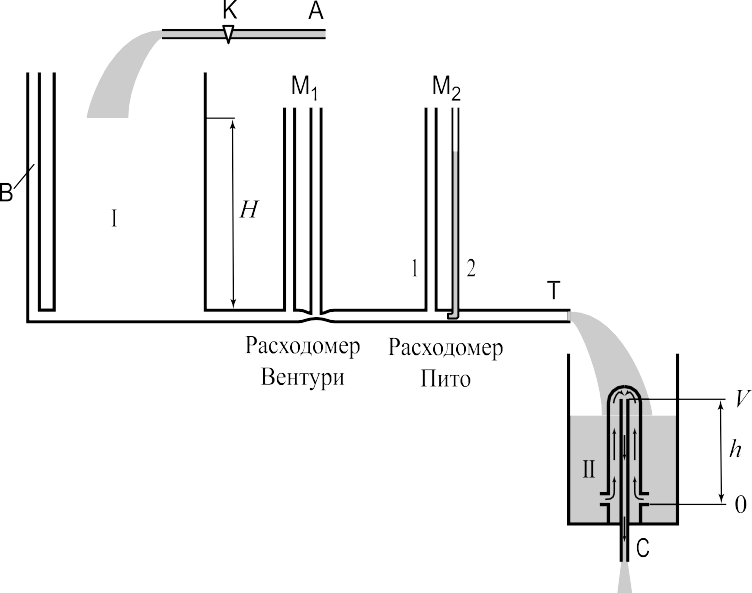
*\_lис. 2. \_lасходомер 11ито*

*v*1 = 2(*p*2 − *p*1)*/ρ. (2)*

*Уравнение (2) позволяет связать скорость жидкости с разностью* высот в трубках манометра М2*.*

*С помощью трубки Пито измеряется локальная скорость потока в* месте расположения трубки. Но в методе Вентури измеряется лишь средняя скорость по сечению трубы. Если нужно измерить только рас- ход, то можно применить метод Вентури, в котором расход вычисляет- ся по некоторой усредненной по сечению трубы скорости. Когда требу- ется определить скорость потока, то нужно использовать трубку Пито. Чаще такая необходимость возникает не при измерениях в трубе, а при исследовании внешнего потока. Трубка Пито применяется в самом ши- роком диапазоне скоростей - от измерений медленных движений в вязком пограничном слое и до измерений сверхзвуковых скоростей на самолетах.

*При использовании трубопроводов всегда важно знать объем или* массу среды, протекающей за единицу времени. Измерения осложня- ются влиянием вязкости, из-за которой и жидкость, и газ <прилипа- ют> к стенке, около которой скорость равна нулю. Поэтому в трубе скорость всегда изменяется вдоль радиуса, всегда увеличивается в той или иной степени по направлению от стенки к оси трубы. Если иссле- дуется установившееся движение при относительно малых числах Рей- нольдса, то применима формула Пуазейля, и в таком случае достаточ- но измерить скорость в одной точке, например, на оси трубы. В других случаях для правильного определения расхода требуется проинтегри- ровать скорость по площади, для чего нужно произвести измерения в нескольких точках. Например, в книге Т.Е. Фабера <Гидроаэродина- мика> рекомендуется использовать 20 трубок Пито, размещенных на разных расстояниях от оси трубы по двум взаимно перпендикулярным направлениям.



*\_lис. 3. Cхема установки для исследования стационарного потока жидкости в трубе*

*К физическим методам определения расхода жидкости или газа от-* носится ультразвуковой расходомер. Этот способ основан на том, что в движущейся среде звук, который распространяется относительно сре- ды с постоянной скоростью, движется вместе с нею, и поэтому в направ- лении движения жидкости или газа скорость звука больше, а против - меньше, чем в покоящейся среде. Излучатель и приемник ультразву- ка устанавливаются на противоположных стенках канала или трубы с определенным сдвигом вдоль оси, так что ультразвук распространя- ется под некоторым углом к направлению скорости потока. Поэтому скорость в направлении движения больше, а в противоположном на- правлении меньше, чем в неподвижной среде. Разница между ними с учетом угла определяет скорость потока, при этом даже не нужно знать скорости звука. Преимущество ультразвукового расходомера в том, что его работа не зависит от вязкости среды. Однако в таких усло- виях измеряется некоторая средняя скорость на пути звукового луча, поэтому для точных измерений прибор нуждается в градуировке. При этом градуировка будет зависеть в том числе и от числа Рейнольдса, так как от него зависит профиль скорости среды.

*Отметим также турбинный расходомер, в котором расход пропорци-* онален числу оборотов турбинки. Однако его показания сильно зависят от вязкости среды.

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Схема установки, служащей для* исследования течения воды в трубе, изображена на рис. 3. Вода по- ступает в трубу Т из цилиндрического резервуара I, снабженного во- домерной трубкой В из стекла. Наполнение резервуара производится из водопровода по трубе А и регулируется краном К. Выливающаяся из трубы Т вода попадает в приемный резервуар II, в дно которого вмонтирован сифон С.

*Сифон предохраняет резервуар от переполнения, автоматически* выливая из него воду, как только ее уровень достигнет высоты *h. Труба* Т снабжена расходомерами Вентури и Пито.

*Скорость течения, усредненную по сечению трубы, можно опреде-* лить по расходу, который находится по измеренному времени наполне- ния резервуара II, объем которого задан. С другой стороны, скорость может быть рассчитана по показаниям манометров с помощью формул

*(1) и (2). Сопоставление этих скоростей со скоростью, определенной по* расходу, позволяет сделать вывод о применимости уравнения Бернул- ли, роли вязкости, которая, в частности, приводит к изменению ско- рости поперек потока. Сопоставление скоростей удобно провести на графике, по оси абсцисс которого отложена скорость по расходу при разных уровнях воды в баке, а по оси ординат - соответствующие

*скорости по расходомерам Вентури и Пито. Для идеальной жидкости* эта зависимость представляла бы прямую линию под углом 45◦ *к оси,* проходящую через начало координат.

*О влиянии вязкости можно судить и по уровням воды в баке и двух* манометрических трубках, присоединенных к стенкам трубы. В слу- чае идеальной жидкости уровни в манометрических трубках должны совпадать с уровнем воды в баке. Вязкость вызывает падение уровня вдоль течения.

*До сих пор предполагалось, что жидкость идеальная и потерь на* трение при ее движении в трубе Т не происходит. Для количественной оценки роли вязкости необходимо проделать следующий эксперимент. Установив уровень жидкости в резервуаре I на определенной высоте *z*1*,* измерить скорость течения жидкости по трубе Т с помощью приемного резервуара II (в силу несжимаемости жидкости ее скорость на входе в трубу Т и на выходе из нее одинакова). По измеренному значению скорости по формуле Торричелли рассчитать ту высоту *z*2*, при кото-* рой жидкость вытекала бы с этой же скоростью в отсутствие вязкости.

*Разность z*1 *z*2 *характеризует потери на внутреннее трение в жидко-* сти, причем можно считать, что эти потери происходят только в трубе Т, так как скорость жидкости в резервуаре I существенно меньше.

−

*Влияние вязкости изменяет показания манометра Вентури* ∆*h на* величину, которую можно оценить, умножив разность *z*1 *z*2 *на отно-* шение расстояния между входами манометра ∆*l ко всей длине трубы*

−

*L. При условии*

∆*l*

∆*h* ≫ (*z*1 − *z*2) *L*

*неидеальностью жидкости в пределах манометра М можно пренебречь.* В противном случае (∆*h сравнимо с* (*z*1 − *z*2) ∆*l ) в уравнении (1) из*

*L*

*p*1 *p*2 *необходимо вычесть* ∆*z* ∆*l ρg.*

*L*

−

*Все сказанное относится и к расходомеру Пито. Кроме этого, для*

*трубки Пито следует сделать оценку поправки к его показаниям, вы-* званную конечностью размеров вставленной в поток частью изогнутой трубки 2.

*При измерениях очень важно обеспечить стационарность течения* жидкости. Это достигается тем, что уровень воды в резервуаре I при каждом измерении с помощью крана К должен поддерживаться на одной и той же высоте *H. Для удобства рядом с водомерной трубкой* имеется миллиметровая шкала. Перед началом измерений следует про- верить, хорошо ли работают манометры (не засорены ли трубки).

*ЗАДАНИЕ*

*1. Налейте немного воды в бак (резервуар I). При закрытой пробкой тру-* бе Т убедитесь, что уровни воды в трубках манометров совпадают с уровнем в баке. Если это не так, найдите и устраните причину.

*2. Для каждого уровня воды в баке (резервуар I) H, от малых уровней* ( 1 *см) до больших, а затем снова до малых, добейтесь стационарного* течения воды в трубе Т, что обеспечивается неизменностью уровня во- ды в баке, и проведите несколько раз измерение времени *t заполнения* резервуара II. Оцените погрешность измерения времени. Для каждого уровня *H запишите также показания манометров расходомеров Венту-* ри и Пито.

∼

*3. По времени t заполнения резервуара II, его объему V*0 *и заданной пло-* щади сечения *S*1 *трубы Т вычислите скорость течения воды по расходу* *vр* = *V*0*/*(*tS*1)*. Оцените погрешность величины скорости.*

*4. Измерьте длину L всей трубы Т, а также* ∆*l манометров Вентури и* Пито.

*5. Постройте зависимость квадрата скорости v*2 *от уровня воды в баке*

*р*

*H. На графике отметьте погрешности определения величин. Здесь же*

*постройте зависимость высоты, рассчитанной по формуле Торричелли* *z*2 = *v*2*/*(2*g*)*, от квадрата скорости. Совпадают ли полученные зависи-* мости? В чем причина расхождений?

*6. По показаниям расходомеров Вентури и Пито с помощью формул (1)* и (2) вычислите значения скоростей *vВ и vп с поправкой на потери* и без нее. Оцените погрешности этих величин. Сравните эти скорости со скоростью *vр, определенной по расходу, отложив их на графике в* зависимости от *vр. Как скажутся на характере построенного графика* погрешности в величине сечений *S*1 *и S*2*, входящих в формулу (1), а* также сужение сечения в области, где впаяна трубка 2 расходомера Пито?

*7. Постройте график зависимости vр от H. По графику определите участ-* ки ламинарного и турбулентного течения. Для точки перехода лами- нарного течения в турбулентное определите число Рейнольдса

*Re* = *vрrρ ,*

*η*

*где ρ - плотность жидкости, r - радиус трубы Т, η - коэффициент* вязкости жидкости (для воды *η* = 1 · 10−3 *кг/м* · *с).*

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. При каких предположениях получено уравнение Бернулли?*

*2. В какую сторону изменяет показания расходомеров Пито и Вентури наличие вязкости?*

*3. При каких уровнях воды H в резервуаре 1 течение в трубе Т ламинарное, а при каких - турбулентное?*

*4. В некотором опыте происходит ламинарное течение жидкости по трубе. Как будет изменяться течение, если использовать все менее вязкую жидкость, оставляя неизменными диаметр трубы, скорость течения и плотность жид- кости?*

*5. При каком течении - турбулентном или ламинарном - получается лучшее согласие скорости, определенной по расходомерам Пито и Вентури, со ско- ростью, найденной с помощью резервуара П?*

*6. Выведите формулу Торричелли. Используя формулу Торричелли, оцените скорости вытекания воды из очень короткой трубы при разных уровнях H. Почему реальные скорости вытекания из длинной трубы значительно мень- ше?*

*7. В расходомерах Пито и Вентури оцените разницу уровней воды* ∆*h в левых измерительных трубках (рис. 3), присоединенных к трубе Т в местах оди- накового сечения. Как можно объяснить наличие разницы давлений? Какие получатся результаты, если с помощью линейного экстраполирования попы- таться найти давления на концах трубы Т?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. Гл. ХII, §§ 93, 94, 95.*

*2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. Гл. ХVI,*

*§§ 123, 124.*

*3. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 1003106.*

*4. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. 1. Гл. 8. §§ 8.3, 8.4, 8.5, 8.6.*

*5. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. - М.: Постмаркет, 2001.*

*здл V*

# *МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ* И ВОЛНЫ

*Снuбu,цные кuJебанин 'армuническu'u uсциJJнтuра. Движения* и процессы, обладающие той или иной повторяемостью во времени, обычно называют колебаниями. Такие движения могут быть связаны с различными явлениями в природе, экономике и общественной жизни. Особенность всех колебаний заключается в том, что они возникают в результате воздействия, стремящегося вернуть систему к равновесию, если она из него выведена. Эта особенность привела к единому мате- матическому описанию изменений характеристик колебаний. Возвра- щающими силами в механике могут быть упругая сила пружины, сила тяжести, упругие силы, возникающие при закручивании стержня или проволоки, и тому подобные.

*Простым примером колебаний является движение груза, подвешен-*

*ного на упругой пружине. Но мы начнем даже с еще более простого* примера. Положим груз и пружину на горизонтальную гладкую (без трения) поверхность. Один конец пружины закрепим неподвижно, к другому прикрепим тело массой *m. Пусть недеформированная пружи-* на имеет длину *l*0*. Если в направлении оси пружины сдвинуть тело или* сообщить ему начальную скорость, то возникнет одномерное движение в направлении оси пружины, которую назовем осью *x. Предположим,* что сила реакции пружины *F пропорциональна изменению ее длины* *l*−*l*0*, которое равно смещению тела от положения равновесия x* = *l*−*l*0*:*

*F* = −*kx. (4.1)*

*Знак минус указывает, что сила направлена противоположно сме-* щению. Постоянный коэффициент пропорциональности *k называется* жесткостью пружины. Следует отметить, что жесткость пружины при больших относительных деформациях может зависеть от величины де- формации и приводить к нелинейности, о которой будет сказано позд- нее.

*Движение массы m описывается вторым законом Ньютона:*

*mx*¨ = −*kx. (4.2)*

*Точками над переменной обозначается дифференцирование по време-* ни.

*Введем обозначение*

*ω*2 = *k . (4.3)*

0 *m*

*Уравнение (4.2) принимает вид*

*x*¨ + *ω*2*x* = 0*. (4.4)*

0

*Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.* Общее решение (4.4) содержит две произвольные постоянные, для на- хождения которых нужно иметь два условия. В частности, можно за- дать начальные (то есть при *t* = 0*) условия. Например, при t* = 0*:* *x* = *x*0*, x*˙ = 0 *или x* = 0*, x*˙ = *v*0*.*

*Для интегрирования уравнения (4.2) умножим его на x*˙*. Тогда, так* как *x*¨ = *dx*˙*/dt и x*˙ = *dx/dt, имеем*

*mx*˙

*dx*˙

*dx*

+ *kx*

*d mx*˙2

=

*kx*2

+

= 0*. (4.5)*

*dt dt dt* 2 2

*Отсюда*

*mx*˙2

##### 2

*kx*2

+

##### 2

= *E. (4.6)*

*Первый член представляет кинетическую энергию движения массы m,* а второй - упругую энергию деформированной пружины. Постоянная интегрирования *E представляет полную механическую энергию систе-* мы масса-пружина. Из (4.6) видно, что *E - положительная величина,* которая может быть найдена из начальных условий. В случае задания начального смещения и начальной скорости, равной нулю,

2

*kx*

*E* = 0 *. (4.7)*

##### 2

*В случае задания начальной скорости при отсутствии смещения*

*mv*2

*E* = 0 *. (4.8)*

##### 2

*Таким образом, первый интеграл (4.6) уравнения (4.2) представляет* закон сохранения механической энергии. Для дальнейшего интегриро- вания запишем (4.6) в виде

##### *x*˙ = ± 2*E* 1 − *k*

*x*2*. (4.9)*

*m* 2*E*

*Введем обозначение*

*x*  *k* = sin *y. (4.10)*

2*E*

*Из (4.9), (4.10) и (4.3) получаем*

*y*˙ = ± *k*

*Интегрируя и переходя к x, находим*

*m*

= ±*ω*0*.*

*x*1 = 2*E* sin(*ω*0*t* + *α*)*,*

*k*

*x*2 = − 2*E* sin(*ω*0*t* + *β*) = 2*E* sin(*ω*0*t* + *π* + *β*)*.*

*Оба решения можно выразить одной формулой:*

*k*

*k*

*x* = 2*E* sin(*ω*0*t* + *ϕ*0)*, (4.11)*

*k*

*где ϕ*0 *- произвольная постоянная, определяемая начальными услови-* ями. Часто (4.11) удобно записывать в виде

*x* = 2*E* cos(*ω*0*t* + *ϕ*0)*. (4.12)*

*k*

*Величина ω*0*t* + *ϕ*0 *называется ф ой колдб ний, а постоянная инте-* грирования *ϕ*0 *называется н ч льной ф ой колдб ний. При изменении* фазы колебаний на величину, кратную 2*π, значения синуса повторяют-* ся. Таким образом, (4.12) описывает периодический процесс. Период его *T определяется из соотношения*

2*π* = *ω*0(*t* + *T* ) + *ϕ*0 − (*ω*0*t* + *ϕ*0) = *ω*0*T.*

*Введенная в (4.3) величина ω*0 *называется круговой (или цикли-* ческой) ч стотой колдб ний. С числом колебаний в секунду (просто частотой) и периодом *T она связана соотношениями*

##### 1

*ν* = =

*T*

*ω*0

*. (4.13)*

2*π*

*Из (4.6) видно, что при увеличении отклонения x скорость x*˙ *падает.*

*Остановка (x*˙ = 0*) происходит при максимальном отклонении x* = *a,*

*которое называется мплитузой колдб ний:*

*ka*2

= *E. (4.14)*

##### 2

*По определению амплитуда a считается положительной величиной.* Подставляя (4.14) в (4.12), получим

*Для скорости имеем*

*x* = *a* sin(*ω*0*t* + *ϕ*0)*. (4.15)*

*x*˙ = *aω*0 cos(*ω*0*t* + *ϕ*0)*. (4.16)*

*Видно, что максимальное смещение в положительном направлении* оси *x отстает от максимальной скорости в том же направлении по фазе* на *π/*2 *(на 90*◦*).*

*В общем случае, когда в начальный момент заданы и x*0*, и v*0*, по-*

*лучаем*

*a* = ✓*x*2 + *v*2*/ω*2*, ϕ*0 = arctg *ω*0*x*0 *. (4.17)*

0

0

0

*v*0

*Колебания, описываемые формулой (4.15), называются гармониче-* скими (или синусоидальными), так как синус и косинус называются гармоническими функциями. Важной особенностью гармонических ко- лебаний является их изохронность, то есть независимость периода ко- лебаний от амплитуды. Систему, которая совершает такие колебания и описывается уравнением (4.4), называют г рмоничдским осциллято- ром. Отметим, что движение тела по окружности с постоянной скоро- стью можно рассматривать как сложение двух гармонических колеба- ний одинаковой амплитуды во взаимно перпендикулярных направлени- ях, сдвинутых по фазе на *π/*2*. Круговая частота колебаний при этом* совпадает с угловой скоростью движения по окружности. Видимо по- этому она называется круговой. В общем случае сложение колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, имеющих разные амплитуды и частоты, приводит к сложной траектории, кото- рая называется фигурой Лисс жу.

*Выражение (4.15) можно преобразовать к виду*

*x* = *A* sin *ω*0*t* + *B* cos *ω*0*t. (4.18)*

*Здесь, как и в (4.15), две постоянные интегрирования, которые опреде-* ляются из начальных условий.

*С помощью (4.15) и (4.16) можно получить выражения для кинети-* ческой *K и потенциальной (упругой) U энергий осциллятора:*

*mx*˙2

*mω*2*a*2

*mω*2*a*2

*K* = = 0 cos2(*ω*0*t* + *ϕ*0) = 0 [1 + cos(2*ω*0*t* + 2*ϕ*0)]*,*

##### 2

*kx*2

2

*mω*2*a*2

4

*mω*2*a*2

*U* = = 0 sin2(*ω*0*t* + *ϕ*0) = 0 [1 − cos(2*ω*0*t* + 2*ϕ*0)]*.*

##### 2 2

*Заметим, что*

4

*mω*2*a*2

0

*K* + *U* = *E* = *.*

##### 2

*По определению средние значения величин K и U за период равны*

*K*¯ =

*T*

1

*K*(*t*) *dt,*

*T*

0

*U*¯ =

*T*

1

*U* (*t*) *dt.*

*T*

0

*Вычисление этих интегралов дает*

2 2

¯ ¯ *mω a*

*K* = *U* = 0 = 4

*E*

*. (4.19)*

##### 2

*Отсюда видно, что средние значения потенциальной и кинетической* энергий гармонического осциллятора равны.

*Рассмотрим теперь колебания груза массой m, подвешенного на*

*пружине жесткости k в поле тяжести с ускорением свободного паде-* ния g. В этом случае вместо (4.2) получим

*mx*¨ = −*kx* + *mg. (4.20)*

*Здесь ось x направлена вертикально вниз так же, как сила тяжести.*

*Пусть x*0 *- растяжение пружины в положении равновесия, тогда*

*mg* = *kx*0*. (4.21)*

*Из (4.20) и (4.21) для отклонения от положения равновесия ξ* =

= *x* − *x*0 *получим*

*mξ*¨ = −*kξ, (4.22)*

*т. е. уравнение гармонического осциллятора (4.4).*

*Фазuный нuртрет 'армuническu'u uсциJJнтuра. Существует за- мечательная графическая интерпретация колебаний гармонического осциллятора на так называемой ф овой плоскости. На координатных*

*осях этой плоскости откладываются координата x материальной точ-* ки и величина, пропорциональная ее скорости, например, ее импульс *mx*˙*. Точка на фазовой плоскости определяет в данный момент времени* состояние механической системы с одной степенью свободы. Рассмот- рим фазовую плоскость гармонического осциллятора, совершающего колебание:

*x* = *a* cos(*ω*0*t* + *ϕ*)*.*

*Будем откладывать на оси абсцисс координату x, а на оси ординат -* величину *y* = *x*˙*/ω*0*. Это удобно, поскольку x и y обладают одинаковой* размерностью. Очевидно,

*y* = −*a* sin(*ω*0*t* + *ϕ*)*.*

*Можно видеть, что*



*\_lис. 4.1. Фазовый портрет гармонического осциллятора*

*x*2 + *y*2 = *a*2*. (4.23)*

*Это уравнение окружности радиуса a. Точ-* ка (*x, y) на фазовой плоскости изобража-* ет состояние осциллятора в данный момент времени. Назовем эту точку изображаю-

*щей. Когда осциллятор движется, его ско-* рость меняется, изображающая точка дви- жется по ф овой тр дктории, которая яв- ляется окружностью. Колебаниям всех воз- можных амплитуд соответствует семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. Рисунок 4.1 представля- ет фазовый портрет гармонического осцил- лятора.

*Колебаниям с одинаковой амплитудой,* но с различными начальными фазами соот-

*ветствует движение по одной и той же окружности, но при этом в один* и тот же момент времени изображающие точки занимают разные поло- жения. Разность фаз равна углу между радиусами-векторами изобра- жающих точек. Можно убедиться в том, что движение изображающих точек происходит по часовой стрелке, полный оборот при этом совер- шается за время, равное периоду осциллятора *T* = 2*π/ω*0*.*

*Фазовая плоскость дает представление о движении системы в це-*

*лом.*

*Снuбu,цные кuJебанин uсциJJнтuра с ннзким трением. Рассмот- рим колебания, при которых, кроме возвращающей силы, действует*

*еще сила, тормозящая движение, то есть всегда направленная противо-* положно скорости. Такие силы возникают, например, при колебаниях в средах, создающих сопротивление движению. При небольших скоро- стях движения они пропорциональны величине скорости:

*Fс* = −*bx*˙*. (4.24)*

*В этом случае вместо (4.2) получаем*

*mx*¨ = −*kx* − *bx*˙*. (4.25)*

*Введем обозначение*

*Теперь вместо (4.4) имеем*

*b*

= 2*β. (4.26)*

*m*

*x*¨ + 2*βx*˙ + *ω*2*x* = 0*. (4.27)*

0

*Решение этого уравнения ищем в виде*

*x* = *a*0*e*−*βt* sin(*ωt* + *ϕ*0)*. (4.28)*

*Дифференцируя по времени и подставляя в (4.27), получаем, что (4.27)* удовлетворяется тождественно, если

*ω*2 = *ω*2 − *β*2*. (4.29)*

0

*Таким образом, при увеличении вязкого трения частота колебаний* падает, а период, который обратно пропорционален частоте, увеличи- вается. Строго говоря, такое движение не является периодическим дви- жением. Тем не менее период в случае затухающих колебаний можно определить как время между прохождениями через положение равно- весия в одном и том же направлении:

2*π*

*T* = *.*

*ω*

*В случае малого затухания (β ω*0*) можно считать, что максимальное* отклонение происходит в момент, когда синус в (4.28) равен единице:

≪

*a* = *a*0*e*−*βt. (4.30)*

*Отношение последовательных максимальных отклонений в одну сто-* рону называется здкрдмднтом тух ния:

*D* = *ai* = *eβT . (4.31)*

*ai*+1

*Натуральный логарифм этого отношения δ называется лог рифмичд- ским здкрдмднтом:*

*δ* = *βT. (4.32)*

*В некоторых системах эта величина может быть отрицательной,* тогда она называется инкрдмднтом. В этих системах амплитуда колеба- ний увеличивается. При положительном *δ, близком к нулю, амплитуда* уменьшается мало и затухание слабое. Если *β ω*0*, то, как следует* из (4.29), частота колебаний близка к собственной частоте *ω*0*.*

≪

*Найдем скорость уменьшения энергии колебаний системы (дисси-* пацию) при слабом затухании. Из (4.19) следует, что в зависимости от амплитуды энергия равна

*E* = 1 *mω*2*a*2*. (4.33)*

2 0

*Подставляя (4.30) в (4.33), а затем, логарифмируя и дифференцируя,* получаем усредненное по периоду колебаний относительное изменение энергии:

*dE*

*E* = −2*βdt. (4.34)*

*Для уменьшения энергии* ∆*E за период T получаем*

∆*E*

= 2*βT* = 2*δ. (4.35)*

*E*

*Важным параметром, характеризующим осциллятор с вязким тре-* нием, является добротность *Q, которая представляет собой умножен-* ное на 2*π отношение энергии в колебательной системе к ее потерям* за период. Далее приведены выражения *Q через другие параметры* осциллятора в случае малого затухания:

*E*

*Q* = 2*π*

∆*E*

*π π*

= =

*δ βT*

*ω*0 *mω*0

= =

2*β b*

√*km*

=

*b*

*k*

=

*bω*0

= *πn. (4.36)*

*Здесь n - число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз* (*e* = 2*,*71828 *. . .).*

*Для затухающих колебаний фазовый портрет представляет собой* спираль, скручивающуюся к центру. В случае сильного затухания, ко- гда *β* 1/ *ω*0*, движение становится апериодическим. Случай, когда β* =

= *ω*0*, называется критическим.*

*Физический мантник. Фи ичдским м ятником называется любое* твердое тело, совершающее колебания относительно неподвижной точ- ки или оси под действием возвращающих сил. Рассмотрим случай, ко- гда возвращающей является сила тяжести. При устойчивом равнове- сии центр масс маятника лежит на одной вертикали с точкой подвеса

*ниже ее. При колебаниях прямая, соединяющая точку подвеса с цен-* тром масс, отклоняется от вертикали на угол *ϕ. Уравнение колебаний* физического маятника напишем для изменения этого угла. В соответ- ствии с формулой (2.35) имеем

*Iϕ*¨ = −*mga* sin *ϕ. (4.37)*

*Здесь I - момент инерции тела относительно оси вращения (подвеса* маятника), *a - расстояние от оси вращения до центра масс тела.*

*Если углы отклонения маятника от вертикали малы и можно счи-* тать sin *ϕ ϕ, то получаем уравнение гармонического осциллятора.* В этом случае для периода колебаний физического маятника имеем

≈

✓

*T* = 2*π I*

*mga*

*. (4.38)*

*Если размер тела, подвешенного на нити или на невесомом стержне* длины *l, намного меньше l, то такое тело называют точечной массой* (материальной точкой), а маятник математическим. В этом случае *I* =

= *ml*2 *и a* = *l. Поэтому период колебаний математического маятника*

*равен*

✓

*T* = 2*π l . (4.39)*

*g*

*Если период математического маятника совпадает с периодом фи-* зического маятника, то *l называют приведенной длиной физического* маятника *lllр:*

*I*

*lllр* = *ma. (4.40)*

*Цднтром к ч ния физического маятника (рис. 4.2) называется точ-* ка *O*′*, расположенная на прямой, проходящей через точку подвеса и* центр масс, на расстоянии *lllр от точки подвеса O. Если всю массу те-* ла сосредоточить в этой точке, то физический маятник превратится

*в математический с тем же периодом колебаний. Обозначим момент* инерции физического маятника относительно центра масс через *I*0*.* Пользуясь теоремой Гюйгенса-Штейнера (2.31), для момента инерции физического маятника относительно оси подвеса получаем

*I* = *I*0 + *ma*2*. (4.41)*

*Подставляя (4.41) в (4.40), имеем*

*I*0

*lllр* = *a* + *ma. (4.42)*

*Видно, что центр качания лежит даль-* ше от оси подвеса тела, чем центр масс. Из этих же формул можно получить, что при- веденная длина физического маятника при подвешивании его за центр качания, кото-



*рую обозначим l*′ *, равна lllр. Для этого вос-*

*llр*

*пользуемся тем, что расстояние от точки ка-*

*чания, которая стала новой точкой подвеса,* до центра масс

*Получаем*

*a*′ = *l*

*llр*

*I*0

− *a* = *ma. (4.43)*

*\_lис. 4.2. Физический*

′

*llр*

*l*

= *I*0 + *a*′ = *a* + *l ma*′

*llр*

− *a* = *l*

*llр*

*. (4.44)*

*маятник*

*Из совпадения приведенных длин следует,* что период колебаний физического маятни-

*ка не изменится, если колебания будут происходить относительно цен-* тра качаний.

*При больших углах отклонения происходят так называемые нели-* нейные колебания математического маятника, период которых зависит от амплитуды колебаний (угла максимального отклонения). Интегри- рование уравнения (4.37) приведено в описании к работе 1.4.3. Здесь приведем лишь окончательное выражение для учета влияния ампли- туды колебаний на период при не очень больших углах отклонения:

*T* ≈ *T*0

2

##### 1 + *m*

*ϕ*

16

*. (4.45)*

*Здесь T*0 *- период при настолько малых отклонениях, что он не зави-* сит от амплитуды и определяется (4.38), а *ϕm - угол максимального* отклонения (амплитуда).

*Для нелинейных колебаний маятника из (4.37) получаем закон со-* хранения механической энергии (первый интеграл):

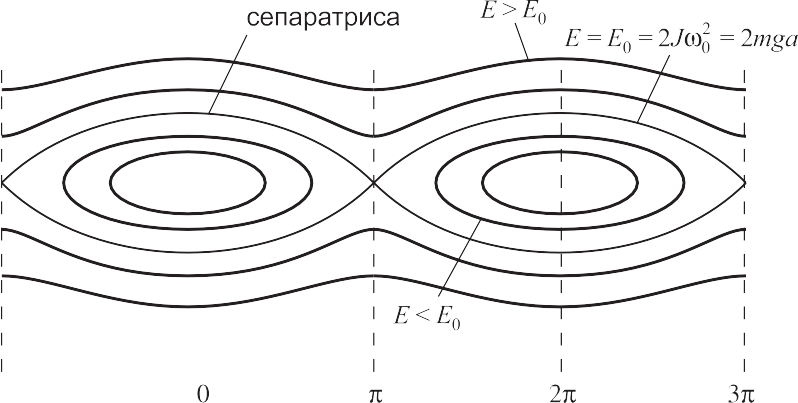
*ϕ*˙2 2

*E*0 2

2 − *ω*0 cos *ϕ* = *I* − *ω*0 *.*

*Здесь введено обозначение ω*2 = *mga/I частоты колебаний при малых* отклонениях, когда нелинейностью можно пренебречь, *E*0 *- полная*

0



*\_lис. 4.3. Фазовый портрет маятника*

*энергия (потенциальная в положении равновесия равна нулю). Фазо-* вый портрет колебаний маятника представлен на рис. 4.3. Эллипти- ческие траектории в случае малых углов соответствуют окружностям рис. 4.1. С увеличением энергии (амплитуды) колебаний траектория перестает быть эллиптической. При достаточно больших энергиях ко- лебания переходят во вращательное движение. Граничная фазовая тра- ектория, отделяющая ограниченное (финитное) движение маятника от вращательного, называется сепаратрисой. Траектории, соответствую- щие неограниченному движению, называются убегающими.

*Выну2К,ценные кuJебанин uсциJJнтuра с ннзким трением. Уста-* новившиеся колебания осциллятора под воздействием периодической внешней силы называются вынужзднными. Мы рассмотрим наиболее важный случай действия сил, меняющихся по гармоническому закону *F* = *F*0 sin *ω*0*t. Любое другое воздействие можно с помощью ряда Фу-* рье представить через гармонические функции и затем воспользовать- ся принципом суперпозиции, который выполняется в случае линейных уравнений колебаний.

*После начала действия вынуждающей силы возможно возникнове-* ние колебаний с различными частотами. В процессе установления оста- ются лишь те колебания, частота которых совпадает с частотой вынуж- дающей силы, которая их и поддерживает. Все остальные колебания в процессе установления затухают.

*Уравнение колебаний в случае вынуждающей силы, меняющейся* по гармоническому закону, имеет вид

*x*¨ + 2*βx*˙ + *ω*2*x* = *F*0 sin *ωt. (4.46)*

0 *m*

*Решение (4.46) для установившихся колебаний ищем в виде колебания* с частотой вынуждающей силы:

*x* = *x*0 sin(*ωt* + *ϕ*)*. (4.47)*

*Здесь ϕ - разность фаз между смещением x и силой F, которая опреде-* ляется из уравнения (4.46), в отличие от сдвига фаз в решении (4.15), который определялся начальными условиями. Отметим, что началь- ные условия не существенны для установившихся вынужденных коле- баний.

*Вычисляя производные (4.47) и подставляя в (4.46), получаем За-* дача заключается в нахождении наилучшего значения

*Поскольку функции* sin *ωt и* cos *ωt линейно независимы, это дает*

(*ω*2 − *ω*2) cos *ϕ* − 2*βω* sin *ϕ* *x*0 = *F*0 *,*

0

*m*

*(4.48)*

(*ω*2 − *ω*2) sin *ϕ* + 2*βω* cos *ϕ* *x*0 = 0*.*

*Из второго условия (4.48) имеем*

0

2*βω*

tg *ϕ* = − *ω*2 − *ω*2 *. (4.49)*

0

*Воспользуемся тригонометрическими тождествами*

##### cos2 *α* = 1

1 + tg2 *α*

*,* sin2 *α* = 1 *,*

##### 1 + ctg2 *α*

*из (4.49) находим*

*ω*2 − *ω*2

2*βω*

cos *ϕ* = (*ω*2 − *ω*2)2 + 4*β*2*ω*2 *,* sin *ϕ* = − (*ω*2 − *ω*2)2 + 4*β*2*ω*2 *.*

0

0

0

*Подставляя эти соотношения в первое уравнение (4.48), находим ам-* плитуду *x*0 *установившихся колебаний:*

*F*0*/m*

*x*0 = (*ω*2 − *ω*2)2 + 4*β*2*ω*2 *. (4.50)*

0

*x*0

*x*0*m*

*x*0*m*

√2

∆*ω*

*F*0

*k*

∼ *ω*2

1

*ω*0 *ω*

*\_lис. 4.4. Aмплитудно-частотная характеристика (Q* = 10*)*

*ϕ*

*ω*0 *ω*

*π*

− 2

−*π*

*\_lис. 4. . Фазово-частотная характристика (Q* = 10*)*

*Используя (4.49), (4.50) и (4.47), можно получить окончательное реше-* ние для вынужденных колебаний.

*На рис. 4.4 и рис. 4.5 приведены графики зависимостей амплиту-* ды и сдвига фазы вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

*При стремлении частоты вынуждающей силы к нулю амплитуда x*0

*стремится к*

*F*0

*mω*2 =

0

*F*0

*. (4.51)*

*k*

*Таким образом, при малых частотах и больших периодах, то есть мед-* ленном движении, смещение определяется жесткостью пружины.

*При высоких частотах вынуждающей силы*

*F*0

*x*0 → *mω*2 *, (4.52)*

*то есть амплитуда колебаний падает с увеличением частоты вынужда-* ющей силы и тем быстрее, чем больше масса осциллятора.

*Максимальное значение амплитуды колебаний и частоту вынуж-* дающей силы, при которой это происходит, можно найти, вычислив экстремум зависимости (4.50):

* 2 2

0

*F*0*/m*

*ωm x* =

*При малом затухании*

*ω*0 − 2*β , x*0*m x* = 2*β* *ω*2 − *β*2 *. (4.53)*

*F*0

*ωm x* ≈ *ω*0*, x*0*m x* ≈ 2*βω*0*m. (4.54)*

*Амплитуда тем больше, чем меньше затухание. Сильное увеличе-* ние амплитуды вынужденных колебаний при частотах вынуждающей силы, близких к собственной частоте осциллятора, называется рд о- н нсом. Как видно из (4.54), (4.51) и (4.36), отношение амплитуды при резонансе к амплитуде при малых частотах равно добротности осцил- лятора *Q.*

*Добротностью определяется и ход зависимости (4.50) вблизи резо-*

*нансной частоты, и так называемая ширина резонансного пика. Из* (4.50), используя малость разности *ω*0 − *ω и (4.36), получаем*

*x*0(*ω*) =

*F*0

✓ 2 = ✓

2*ω*0∆*ω*

2*βω*0

1 + *Q*2

2*mβω*0

1 +

*x*0*m x*

2∆*ω*

*ω*0

*. (4.55)*

2

*Отметим, что зависимость*

##### 1 +

##### 1

(*ω*0 − *ω*)2

*β*2

*называют лоренцевой функцией. Эта функция часто встречается при*

*анализе спектральных линий.*

*Для ширины пика на уровне x*0 = *x*0*m x/*

*ω*0

√2 *из (4.55) имеем*

2∆*ω* =

*. (4.56)*

*Q*

*Разность фаз между смещением и вынуждающей силой, как видно* из (4.49), при стремлении частоты вынуждающей силы к нулю также стремится к нулю. Фазы совпадают. При резонансе смещение отстает от вынуждающей силы на *π/*2*. Зато скорость совпадает по фазе с си-* лой. Понятно, что максимальных амплитуд можно достигнуть, если максимальная сила действует при максимальной скорости в направ- лении скорости. При высоких частотах вынуждающей силы смещение отстает от силы на *π (в противофазе).*

*Резонансные зависимости для амплитуд скорости v*0 *и ускорения a*0

*отличаются от резонансных зависимостей для амплитуды смещения.* Так как *v*0 = *x*0*ω, a*0 = *x*0*ω*2*, то v*0 = 0 *и a*0 = 0 *при ω* = 0*. Максималь-* ное значение амплитуды скорости получаем при *ω* = *ω*0*, а максималь-* ное значение амплитуды ускорения - при *ω*2*/ ω*2 − 2*β*2*. При возрас-*

0

0

*тании частоты вынуждающей силы амплитуда скорости стремится к* нулю, а амплитуда ускорения - к постоянной величине *F*0*/m.*

*Когда осциллятор совершает вынужденные колебания, его энергия*

*остается неизменной. В то же время он непрерывно поглощает энергию* от источника внешней силы. Эта энергия идет на преодоление трения, т. е. превращается в тепло. Количество энергии, поглощаемой в сред- нем в единицу времени, равно

##### 1

*I*(*ω*) = *F* · *x*˙ = *F*0*ωx*0cos(*ωt* + *ϕ*) sin *ωt* = − 2 *F*0*ωx*0 sin *ϕ. (4.57)*

*Рассмотрим ситуацию вблизи резонанса, когда ω ω*0 = ∆*ω ω*0*.* Поскольку при этом

| − | | | ≪

1 *Q*

(*ω*2 − *ω*2)2 + 4*β*2*ω*2 ≈ ✓ 2

*,*

0

2

0

1 + *Q*2

2∆*ω*

*ω*0

*ω*

*имеем*

*x*0 =

*F*0*Q*

* 2

*,*

*mω*2

0

##### sin *ϕ* = −✓

1 + *Q*2

1 + *Q*2

##### 1

2∆*ω*

*ω*0

##### 2

*.*

2∆*ω*

*ω*0

*Подставляя эти выражения в (4.57), находим*

*F* 2*Q*

0

*I*(∆*ω*) = [ 2∆*ω* 2 *(4.58)*

*или*

2*mω*0

1 + *Q*2

*ω*0

*I*(∆*ω*) =

*I*(0)

2∆*ω* 2

*,*

*где*

1 + *Q*2

*ω*0

*F* 2*Q*

#### *I*(0) = 0 *.*

2*mω*0

*Зависимость поглощаемой энергии от частоты внешней силы, как вид-* но из формулы (4.58), также имеет резонансный характер. Определим ширину резонансной кривой. На уровне 1*/*2 *имеем*

*I*(0)

=

##### 2

*I*(0)

2∆*ω* 2 *.*

1 + *Q*2

*Отсюда находим*

*ω*0

∆*ω* 1

*ω*0 = ± 2*Q,*

*т. е. ширина резонансной кривой равна*

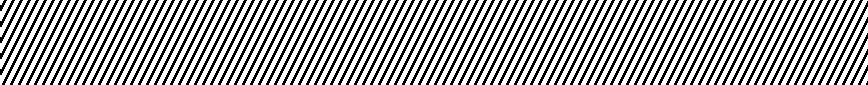
*ω*0

2|∆*ω*| = *Q .*

*Таким образом, как максимальная поглощаемая энергия, так и ширина* резонансной кривой определяются добротностью осциллятора.

*Снuбu,цные кuJебанин сннзанных мантникuн. До сих пор рас- сматривались системы с одной степенью свободы. Рассмотрим теперь*

*m m*



φ1 φ2

*a a*

*l*

*k*

*l*

*\_lис. 4.6. Cвязанные маятники*

*простейшую модель системы с двумя степенями свободы - два оди-* наковых маятника, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка (рис. 4.6). Маятники представляют собой невесомые спицы с насаженными на них маленькими тяжелыми шариками.

*Обозначения показаны на рисунке. Если углы отклонения маятни-* ков от положения устойчивого равновесия достаточно малы (sin *ϕ ϕ,* cos *ϕ* 1 *ϕ*2*/*2*), то со стороны пружины на первый маятник действует* момент силы, равный

≈ −

≈

*M*21 = *ka*2(*ϕ*2 − *ϕ*1)*.*

*Аналогично второй маятник будет испытывать вращающий момент* противоположного знака:

*M*12 = −*ka*2(*ϕ*2 − *ϕ*1)*.*

*Эти моменты описывают связь между маятниками.*

*Уравнения движения маятников имеют вид*

2 *d*2*ϕ*1 2

*ml dt*2 = −*mglϕ*1 + *ka* (*ϕ*2 − *ϕ*1)*, (4.59)*

2 *d*2*ϕ*2 2

*ml dt*2 = −*mglϕ*2 − *ka* (*ϕ*2 − *ϕ*1)*. (4.60)*

*Сложив эти два уравнения, находим*

2 *d*2

*ml dt*2 (*ϕ*1 + *ϕ*2) = −*mgl*(*ϕ*1 + *ϕ*2)*. (4.61)*

*Вычитание (4.60) из (4.59) дает*

2 *d*2 2

*ml dt*2 (*ϕ*1 − *ϕ*2) = −(*mgl* + 2*ka* )(*ϕ*1 − *ϕ*2)*. (4.62)*

*Заметим, что с помощью операций сложения и вычитания нам уда-* лось <развязать> уравнения (4.59) и (4.60). Решения уравнений (4.61) и (4.62) имеют вид

*ϕ*1 + *ϕ*2 = *A* cos(*ω*+*t* + *α*)*, (4.63)*

*ϕ*1 − *ϕ*2 = *B* cos(*ω*−*t* + *β*)*, (4.64)*

*ω*+ =

*g , ω*− =

*l*

*g* 2*ka*2

*l* + *ml*2 *,*

*где A, B, α, β - произвольные константы. Складывая и вычитая (4.63)* и (4.64), находим

##### 1

*ϕ*1 =

##### 2

*A* cos(*ω*+

*t* + *α*) +

*B* cos(*ω*−

##### 2

1

*t* + *β*)*, (4.65)*

*ϕ*2 = 1 *A* cos(*ω*+*t* + *α*) − 1 *B* cos(*ω*−*t* + *β*)*. (4.66)*

2

2

*Для угловых скоростей при этом имеем*

*ϕ*˙1 = − 1 *ω*+*A* sin(*ω*+*t* + *α*) − 1 *ω*−*B* sin(*ω*−*t* + *β*)*, (4.67)*

##### 2

1

##### *ϕ*˙2 = − 2

*ω*+*A* sin(*ω*+

*t* + *α*) +

2

1. *ω*−

##### 2

*B* sin(*ω*−

*t* + *β*)*. (4.68)*

*Проанализируем полученные решения. Пусть маятники имеют вна-* чале (при *t* = 0*) одинаковые отклонения и нулевые начальные скоро-* сти:

*ϕ*1(0) = *ϕ*2(0) = *ϕ*0*,*

*Тогда из (4.65) - (4.68) находим*

##### *ϕ*˙1(0) = *ϕ*˙2(0) = 0*.*

sin *α* = 0*, A* = 2*ϕ*0*, B* = 0*,*

*т. е.*

*ϕ*1 = *ϕ*0 cos *ω*+*t, ϕ*2 = *ϕ*0 cos *ω*+*t. (4.69)*

*Это означает, что маятники будут колебаться с одинаковой амплитудой* и в одинаковой фазе (синфазно).

*Если при t* = 0

##### *ϕ*1(0) = −*ϕ*2(0) = *ϕ*0*,*

*то из (4.65) - (4.68) следует*

##### *ϕ*˙1(0) = *ϕ*˙2(0) = 0*,*

sin *β* = 0*, A* = 0*, B* = 2*ϕ*0*,*

*т. е.*

*ϕ*1 = *ϕ*0 cos *ω*−*t, ϕ*2 = −*ϕ*0 cos *ω*−*t* = *ϕ*0 cos(*ω*−*t* + *π*)*. (4.70)*

*Соотношения показывают, что маятники колеблются с постоянной ам-* плитудой, синхронно, но не синфазно: колебания маятников находятся в противофазе. Два вида движения (4.69) и (4.70) называются нор- м льными моз ми колдб ний системы связанных осцилляторов. Нор- мальная мода колебаний - это коллективное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой частицы остается постоянной. В совре- менной физике понятие нормальной моды играет очень важную роль. Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени от-

*клонен лишь один маятник, т. е.*

*ϕ*1(0) = *ϕ*0*, ϕ*2(0) = 0*, ϕ*˙1(0) = *ϕ*˙2(0) = 0*.*

*Можно показать, что в этом случае*

*ϕ*1 = *ϕ*0 (cos *ω*+*t* + cos *ω*−*t*)*, (4.71)*

##### 2

*ϕ*2 = *ϕ*0 (cos *ω*+*t* cos *ω*−*t*)*. (4.72)*

−

##### 2

*Используя тригонометрические тождества*

cos *α* + cos *β* = 2 cos *α* + *β* cos *α* − *β ,*

##### 2 2

cos *α* − cos *β* = 2 sin *α* + *β* sin *β* − *α,*

2

2

*уравнения (4.71) и (4.72) можно представить в виде*

##### *ϕ*1 = *ϕ*0 cos

*ω*+ *ω*−

1. *t* · cos

−

*ω*+ + *ω*−

*t, (4.73)*

##### 2

*ϕ*2 = *ϕ*0 sin

*ω*− *ω*+

2 *t* · sin

−

*ω*+ + *ω*−

*t. (4.74)*

##### 2

*Проанализируем формулы (4.73) и (4.74). Заметим, что частота ко-* лебаний четной моды (моды, отмеченной знаком <+>) *ω*+ = *g/l рав-* на *ω*0*, где ω*0 *- собственная частота одиночного маятника (так назы-* ваемая п рци льн я ч стот ). С другой стороны, частота колебаний нечетной моды (моды, отмеченной знаком <−*>) равна*

*ω*− = *ω*0√1 + 2*ε,*

*где параметр ε* = *ka*2*/mgl характеризует связь маятников. В случае* слабой связи, когда *ε* ≪ 1*, можно считать, что*

*ω*− ≈ *ω*0(1 + *ε*)*,*

*т. е.*

*ω*− − *ω*+ ≈ *ω*0*ε, ω*− + *ω*+ ≈ 2*ω*0*.*

*Уравнения (4.73), (4.74) можно при этом представить приближенно в* виде

##### *ϕ*1 = *ϕ*0 cos

*ω*0*ε*

##### 2

*t* cos *ω*0*t, (4.75)*

*ϕ*2 = *ϕ*0 sin *ω*0*εt* sin *ω*0*t* = *ϕ*0 sin *ω*0*εt* cos (*ω*0*t* − *π* ) *. (4.76)*

2

2

2

*Таким образом, мы имеем дело с гармоническими колебаниями ча-* стоты *ω*0*, амплитуда которых изменяется со временем периодически* с гораздо меньшей частотой *ω*0*ε/*2*. Это - так называемые мплитузно-* мозулиров нныд колдб ния, или, другими словами, бидния. Относитель- ная фаза колебаний равна *π/*2*. Модулированная амплитуда колебаний* первого маятника есть величина

*A*1(*t*) = *ϕ*0 cos

*ω*0*ε*

##### 2

*t. (4.77)*

*Аналогично амплитуда колебаний второго маятника равна*

*ω*0*ε ω*0*ε π*

*A*2(*t*) = *ϕ*0 sin

*t* = *ϕ*0 cos(

##### 2

2 *t* − 2 )*.*

*В начальный момент времени t* = 0 *имеем*

*A*1 = *ϕ*0*, A*2 = 0*.*

*В момент времени t* = *π*

*ω ε*

0

*A*1 = 0*, A*2 = *ϕ*0*.*

*В момент времени t* = 2 *π*

*ω ε*

0

*A*1 = −*ϕ*0*, A*2 = 0*.*

*Отметим, что амплитуда гармонического колебания, по определению,* величина положительная. Отрицательный знак здесь означает, что от- носительная фаза колебаний изменилась на *π. В момент времени t* =

*π*

= 3

*ω*0*ε*

*A*1 = 0*, A*2 = −*ϕ*0*.*

*В момент времени t* = 4 *π*

*ω ε*

0

*A*1 = *ϕ*0*, A*2 = 0*.*

*Таким образом, происходит передача колебаний от одного маятни-* ка к другому. Маятники обмениваются энергией. При *t* = 0 *вся энергия* сосредоточена в первом маятнике. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму до тех пор, пока в нем не накопится вся энергия. Время *τ, необходимое для* перехода энергии от одного маятника к другому и обратно, можно оце- нить из уравнения

*т. е.*

*ω*0*ε*

##### 2

*τ* = *π,*

2*π*

*τ* =

*ω*0*ε*

*. (4.78)*

*Частота, с которой осцилляторы обмениваются энергией, равна*

2*π* = *ω*0*ε* = *ω*− *ω*+*. τ*

−

*Отметим, что колебания в системе с большим числом связанных* осцилляторов можно трактовать как распространение в системе опре- деленного типа волн.

*ПJuскан стациuнарнан бе'ущан нuJна. В физике волной назы-* вают всякое изменяющееся во времени пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например, плотности вещества, давления, температуры, напряженности электри- ческого поля и т. д. Такие чередования являются, по существу, колеба- ниями в распределенной системе, т. е. в системе с бесконечным числом

*степеней свободы. Часто, однако, волной называют также явление, при* котором в пространстве происходит распространение кратковременно- го возмущения, как говорят, <толчка>. Простейшей моделью волнового процесса является плоская стационарная бегущая волна.

*Пусть некоторая скалярная физическая величина s зависит от вре-* мени *t и пространственной координаты x (но не зависит от координат* *y, z) по закону*

*s* = *f* (*x* − *ut*)*, (4.79)*

*где f - произвольная функция, а u* = const*. Рассмотрим моменталь-* ный снимок волнового процесса в момент *t* = 0*. В этом случае*

*s*(0*, x*) = *f* (*x*)*. (4.80)*

*Рассмотрим далее моментальный снимок той же волны в момент*

*t* = *t*1*. Его уравнение имеет вид*

*s*(*t*1*, x*) = *f* (*x* − *ut*1)*. (4.81)* Из формул (4.80), (4.81) видно, что моментальный снимок в момент

*t* = *t*1 *отличается от моментального снимка t* = 0 *только смещением в* положительном направлении оси *x на расстояние ut*1*. Таким образом,* рассматриваемая волна перемещается не .меняя своей фор.мы в сторону возрастающих *x со скоростью распространения, равной u. Волновой* процесс, описываемый функцией (4.79), называется поэтому плоской ст цион рной бдгущдй волной. Волна, описываемая функцией

*s* = *f* (*x* + *ut*)*,*

*распространяется в противоположном направлении.*

*ПJuскан синусuи,цаJьнан бе'ущан нuJна. Особый интерес пред- ставляет частный случай, когда функция f синусоидальная, т. е.*

*s* = *A* cos(*ωt* − *kx*) = *A* cos *k*(*x* − *ut*) *, (4.82)*

*где u* = *ω/k - скорость распространения волны. В каждой точке про- странства (x фиксировано) величина s совершает гармоническое коле- бание. Его мплитуз равна A, кругов я ч стот - ω. Обе эти величины одинаковы для всех x. Пдриоз колдб ния равен T* = 2*π/ω. Ф колдб - ния равна kx.*

*Моментальный снимок волны (4.82) есть синусоида в пространстве.*

*Например, при t* = 0

*s* = *A* cos *kx.*

*Пространственный период, т. е. минимальное расстояние λ, такое, что* при любом *x*

*s*(*x* + *λ*) = *s*(*x*)*,*

*называют злиной волны. Величина k называется волновым числом или простр нствднной ч стотой. Очевидно, что*

2*π*

*λ* = *. k*

*Стuнчие нuJны. Пусть скалярная величина s зависит от простран-* ственных координат *x, y, z и времени t по закону*

*s* = *F* (*x, y, z*) cos(*ωt* + *ϕ*)*,*

*где F* (*x, y, z*) *- некоторая произвольная функция, ω и ϕ - постоянные.* Это значит, что величина *s во всех точках пространства совершает гар-* моническое колебание с одинаковой частотой и фазой. Но амплитуда колебания различна для различных точек пространства. Такого рода

*явление называют стоячдй волной.*

*Убедимся в том, что наложение двух бегущих плоских синусоидаль-* ных волн одинаковой амплитуды, длины волны и частоты, распростра- няющихся в противоположных направлениях, есть стоячая плоская си- нусоидальная волна.

*Действительно, пусть*

*s*1 = *A* cos(*ωt* − *kx* + *α*1)*, s*2 = *A* cos(*ωt* + *kx* + *α*2)*.*

*Тогда сумма*

*s* = *s*1 + *s*2

*согласно известной тригонометрической формуле*

cos *x* + cos *y* = 2 cos *x* + *y* cos *x* − *y*

##### 2 2

*может быть представлена в виде*

*s* = 2*A* cos *kx* − *α*1 − *α*2 cos *ωt* + *α*1 + *α*2 *. (4.83) Это - уравнение синусоидальной стоячей волны.*

2

2

*Пусть теперь*

*s*1 = *A*1 cos(*ωt* − *kx* + *α*1)*, s*2 = *A*2 cos(*ωt* + *kx* + *α*2)*.*

*Можно показать, что в этом случае*

*s* = 2*A*2 cos *kx* − *α*1 − *α*2 cos *ωt* + *α*1 + *α*2 + *a* cos(*ωt* − *kx* + *α*1)*.*

2

2

*Здесь принято обозначение a* = *A*1 *A*2*. Величину a/A*2 *называют коэффициднтом бдгучдсти.*

−

*ВuJнuнuе ураннение. Рассмотрим функцию, описывающую плоскую стационарную волну:*

*f* (*x, t*) = *f* (*x* − *ut*)*. (4.84)* Продифференцируем ее дважды по *t:*

*∂f*

′

*∂t* = *f* (*x* − *ut*) · (−*u*)*,*

*∂*2*f*

*∂t*2

= *f* ′′(*x* − *ut*) · *u*2*. (4.85)*

*Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу x ut. Про-* дифференцируем теперь функцию (4.84) дважды по *x:*

−

*∂f*

′

*∂x* = *f* (*x* − *ut*)*,*

*∂*2*f*

*∂x*2

= *f* ′′(*x* − *ut*)*. (4.86)*

*Сравнивая (4.85) и (4.86), убеждаемся в том, что функция (4.84) удо-* влетворяет уравнению

*∂*2*f*

*∂t*2 = *u*

2 *∂*2*f*

*∂x*2 *. (4.87)*

*Уравнение (4.87) - дифференциальное уравнение в частных произ-* водных, играющее в физике очень важную роль, - называется волно- вым ур внднидм. В математических курсах доказывается, что его общее решение имеет вид

*f* (*x, t*) = *f*1(*x* − *ut*) + *f*2(*x* + *ut*)*,*

*где f*1 *и f*2 *- произвольные функции, вид которых в конкретной задаче* определяется из начальных или граничных условий.

*Прu,цuJьные нuJны н ,цефuрмируемuм тнер,цuм теJе. Рассмот-* рим динамику продольных волн в упругом стержне. Координатную ось *x направим вдоль стержня. Пусть материальные точки, составляющие* стержень, перемещаются и при том так, что материальные точки, со- ставляющие при *t* = 0 *плоскость, перпендикулярную к оси x, образуют* также в любой момент *t* = 0 *плоскость, перпендикулярную к оси x. Ко-* ордината *x сечения в момент времени t* = 0 *будет иметь в момент t* = *t*′

l

*значение, отличное, вообще говоря, от x, назовем его x*′*. Величину (по-* ложительную или отрицательную)

*s* = *x*′ − *x*

*будем называть смещением величины x. Рассмотрим участок стерж-* ня, ограниченный плоскостями с координатами *x и x* + ∆*x, длина это-* го участка до возникновения возмущения была равна ∆*x. Возмуще-* ние вызывает перемещение плоскостей. Плоскости с координатами *x и* *x* + ∆*x после перемещения имеют координаты x*′ *и x*′ + ∆*x*′*, отличные,* вообще говоря, от *x и x* + ∆*x.*

*Пусть*

*x*′ = *x* + *s*(*x*)*,*

*x*′ + ∆*x*′ = *x* + ∆*x* + *s*(*x* + ∆*x*)*,*

*где s*(*x*) *- смещение плоскости с координатой x, s*(*x* + ∆*x*) *- смеще-* ние плоскости с координатой *x* + ∆*x. Тогда длина рассматриваемого* участка равна

(*x*′ + ∆*x*′) − *x*′ = ∆*x*′*.*

*Приращение длины этого участка равно*

∆*x*′ − ∆*x* = *s*(*x* + ∆*x*) − *s*(*x*)*.*

*Средняя относительная продольная деформация участка x, x*+∆*x есть*

*s*(*x* + ∆*x*) − *s*(*x*) *.*

∆*x*

*Продольной деформацией ε в данной точке называется предел*

*ε* = lim

*s*(*x* + ∆*x*) − *s*(*x*) = *∂s . (4.88)*

∆*x*→0 ∆*x ∂x*

*В силу закона Гука имеем*

*σ* = *Eε, (4.89)*

*где σ - механическое напряжение в стержне, E - модуль упругости.* Применим теперь второй закон Ньютона к движению куска стержня, заключенного между плоскостями с координатами *x и x* + ∆*x. Масса* этого куска равна *ρS*∆*x, где ρ и S - соответственно плотность и пло-* щадь сечения в отсутствие деформации. Пусть *s - смещение центра* масс рассматриваемого куска. Тогда

*∂*2*s*

*ρS*∆*x ∂t*2 = *Sσ*(*x* + ∆*x*) − *Sσ*(*x*)*.*

*Слева стоит произведение массы куска на ускорение его центра масс,* справа - результирующая внешних сил, действующих на кусок. Раз- делим уравнение на *S*∆*x:*

*∂*2*s*

*ρ ∂t*2 =

*σ*(*x* + ∆*x*) − *σ*(*x*) *.*

∆*x*

*Перейдя к пределу при* ∆*x* → 0*, получим уравнение*

*∂*2*s ∂σ*

*ρ ∂t*2 = *∂x. (4.90)*

*Подставляя (4.89) в (4.90), находим*

*∂*2*s ∂ε*

*В силу (4.88) имеем*

*ρ ∂t*2 = *E ∂x.*

*∂ε ∂*2*s*

*т. е.*

*∂x* = *∂x*2 *,*

*∂*2*s*

*∂t*2 =

*E ∂*2*s*

*ρ ∂x*2 *. (4.91)*

*Это - волновод ур внднид. Оно указывает, что смещение распространя-* ется по стержню в виде плоской стационарной волны *s* = *f* (*x ut*) *или* образует суперпозицию таких волн. Скорость распространения этих волн (скорость звука в стержне)

∓

✓

*u* = *E .*

*ρ*

*Для стали u* = 5200 *м/с, для меди u* = 3700 *м/с, для алюминия u* =

= 5100 *м/с, для резины u* = 46 *м/с.*

*Заметим, что сделанные при выводе волнового уравнения упрощаю-*

*щие предположения справедливы лишь в том случае, когда длина вол-* ны велика по сравнению с поперечными размерами стержня. В обрат- ном предельном случае мы имеем дело, по существу, с неограниченной упругой средой. В теоретических курсах показывается, что скорость распространения продольной упругой волны в неограниченной среде равна

✓

✓

*u*1 =

*E*′ *E*(1 *µ*)

−

= *,*

*ρ ρ*(1 + *µ*)(1 − 2*µ*)

*где µ - коэффициент Пуассона.*

*ПJuтнuсть нuтuка энер'ии. Выделим мысленно небольшой кусок* стержня, объем которого в недеформированном состоянии равен *S*∆*x,* а масса - *ρS*∆*x. Если этот кусок движется параллельно оси x, его* кинетическая энергия равна

1

*ρS*∆*x*

##### 2

*∂s* 2

*,*

*∂t*

*где ∂s/∂t - скорость куска в рассматриваемый момент времени. На* единицу объема приходится кинетическая энергия

*w* = 1 *ρv*2*.*

*к* 2

*Эта величина называется плотностью киндтичдской эндргии.*

*Можно показать, что выделенный кусок стержня обладает также* потенциальной энергией, плотность которой равна (см. вывод форму- лы (3.4))

*Общая плотность эндргии*

*w* = *w*

*wll*

+ *w*

= 1 *Eε*2*.*

##### 2

= 1 (*ρv*2 + *Eε*2)*.*

*к ll* 2

*Полная энергия, содержащаяся в куске стержня, ограниченного се-* чениями *x* = *x*1 *и x* = *x*2*:*

*x*2

*W* = *wS dx* =

*x*1

*x*2

(*ρv*2 + *Eε*2) *dx.*

*S*

##### 2

*x*1

*Изменение этой энергии равно работе, совершенной силами, действу-* ющими на рассматриваемый кусок со стороны частей стержня, нахо- дящихся слева и справа от него. Будем обозначать индексами 1 и *2*

*величины, относящиеся соответственно к сечениям x* = *x*1 *и x* = *x*2*.*

*Слева действует сила F*1 = *Sσ*1 *(знак минус потому, что если σ*1 *>* 0*,* то по определению *F*1 *направлена влево, т. е. отрицательна), сила спра-* ва *F*2 = *Sσ*2 *(если σ*2 *>* 0*, то эта сила направлена вправо). Работа сил* *F*1*, F*2 *за время dt равна соответственно F*1*v*1*dt, F*2*v*2*dt. Следовательно,* общая работа есть

−

(*F*1*v*1 + *F*2*v*2)*dt* = −(*σ*1*v*1 − *σ*2*v*2)*Sdt.*

*В силу закона сохранения энергии эта работа равна изменению dW*

*энергии за время dt, поэтому*

*dW*

*dt* = *Q*1 − *Q*2*,*

*где*

*Q*1 = −*Sσ*1*v*1*, Q*2 = −*Sσ*2*v*2*.*

*Отсюда видно, что величина Q* = *Sσv характеризует поток энергии* через данное сечение. Единица измерения [*Q*] = 1 *эрг/с или* 1 *Дж/с* =

−

= 1 *Вт. Плотностью поток эндргии называется величина*

*q* = −*σv* = *Pv,*

*где* −*σ* = *P*2 *- давление в данном сечении. Единица измерения* [*q*] =

2

= 1 *эрг/*(*см* · *с*) *или* 1 *Вт/м . Вычислим величину плотности потока*

*энергии в плоской синусоидальной бегущей волне, описываемой урав-*

*нением*

*Очевидно, что*

*Поэтому*

*s* = *A* cos(*ωt* − *kx*)*.*

*∂s*

*σ* = *Eε* = *E ∂x* = *EkA* sin(*ωt* − *kx*)*,*

*∂s*

*v* = *∂t* = −*Aω* sin(*ωt* − *kx*)*.*

*q* = −*σv* = *EkωA*2 sin2(*ωt* − *kx*) = 1 *EkωA*2(1 − cos(2*ωt* − 2*kx*))*.*

2

*Можно видеть, что поток энергии достигает максимума дважды за* период, а его частота в каждой точке стержня равна 2*ω. Усредненное* за период значение *q равно*

*q*¯ =

*T*

1

*q*(*t*) *dt* =

*T*

0

1 *EkωA*2*.*

##### 2

*В акустике величину q*¯ *принято называть силой вук . Сила звука обыч-* но измеряется в децибелах (дБ), в соответствии с формулой

*D* = 10 lg *q*¯*, мкВт* + 100 (*дБ*)*.*

*см*2

*Отсюда видно, если q*¯ = 10−10 *мкВт/см*2*, то D* = 0 *(это начало отсчета).* Если *q*¯ = 10−6 *Вт/см*2*, то D* = 100 *дБ. Болевой порог, т. е. величина q*¯*,* от восприятия которой человек испытывает болевые ощущения, равен

*q*¯ = 10−4 *Вт*

*см*2

= 102 *мкВт .*

*см*2

*Ему соответствует величина D* = 120 *дБ.*

*Пусть в стержне создана стоячая волна*

*s* = *A* sin *kx* cos(*ωt* + *ϕ*)*,*

*при этом*

*σ* = *EkA* cos *kx* cos(*ωt* + *ϕ*)*, v* = −*Aω* sin *kx* sin(*ωt* + *ϕ*)*,*

*q* = 1 *EkωA*2 sin 2*kx* sin(2*ωt* + 2*ϕ*)*.*

##### 4

*Можно видеть, что в сечениях стержня с координатами*

*λ x*1 = 0*, x*2 = =

##### 4

*π λ*

*, x*3 = 2

2*k* 4

*π λ*

= 2 *, x*4 = 3

2*k* 4

*π*

= 3 *, . . .*

2*k*

*плотность потока энергии в любой момент времени равна нулю. Это* означает, что каждый участок стержня длины *λ/*4*, заключенный меж-* ду узлом напряжения и ближайшим к нему узлом скорости, не обме- нивается энергией с соседними участками. Его энергия постоянна.

*Пuнеречные нuJны на струне. Струной в акустике называют од-* нородную тонкую гибкую нить, в которой с помощью внешних сил создано большое натяжение. Под это определение подходят не только струны музыкальных инструментов, но также, например, натянутый шнур, трос или резиновый жгут.

*Пусть координатная ось x совпадает с осью струны при равновесии.* Пусть, кроме того, частицы струны смещаются только в плоскости *x,*

*y. Обозначим через s*(*x, t*) *смещение точки, имеющей при равновесии* абсциссу *x. Рассмотрим кусок струны x, x*+∆*x и запишем для него вто-* рой закон Ньютона. Масса этого куска равна *ρS*∆*x, где ρ - плотность* материала струны, *S - площадь ее поперечного сечения. Произведе-* ние массы куска на ускорение *∂*2*s/∂t*2 *его центра масс равно сумме* проекций на ось *y сил, действующих на его концы:*

*∂*2*s*

*ρS*∆*x ∂t*2 = −*Sσ*(*x*) sin *α*(*x*) + *Sσ*(*x* + ∆*x*) sin *α*(*x* + ∆*x*)*. (4.92)*

*Здесь σ*(*x*) *- натяжение в точке x, α*(*x*) *- угол между направлением* касательной к струне в точке *x и осью x. Очевидно, что*

*∂s*

tg *α* = *.*

*∂x*

*Предположим, что смещения s*(*x, t*) *настолько малы, что можно с* достаточным приближением пренебречь: 1) отличием натяжения *σ*(*x*) *от натяжения струны σ в равновесном состоянии; 2) отличием между*

sin *α и* tg *α.*

*В результате этих упрощений уравнение (4.92) приобретает вид*

*∂*2*s ρ*∆*x ∂t*2 = *σ*

*∂s*

*∂x x*+∆*x* −

[

*∂s*

*∂x x*

*. (4.93)*

*Разделив (4.93) на* ∆*x и сделав предельный переход* ∆*x* 0*, получим* волновое уравнение:

→

*∂*2*s σ ∂*2*s*

*∂t*2 = *ρ ∂x*2 *. (4.94)*

*Согласно этому уравнению, поперечные волны на струне распро-* страняются не меняя формы со скоростью

*c* = *σ* = ✓ *F ,*

*s*

*ρ*

*ρS*

*где F - сила, натягивающая струну, ρS - масса струны на единицу* длины.

*Сuбстненные кuJебанин струны. При определенных условиях опы- та на струне могут образоваться стоячид попдрдчныд волны, описывае- мые уравнением*

*s* = *A* sin *kx* cos(*ωt* + *ϕ*)*, (4.95)*

*где k* = *ω/u. Выделим участок струны, закрепив точки x* = 0*, x* =

= *n*(*λ/*2) = *nπ/k. Поскольку точки x* = 0*, x* = *nπ/k неподвижны (это* узлы смещения *s), их закрепление ничего не меняет. Это означает,* что ограниченная, закрепленная на концах струна длиной *l, может* совершать собственные колебания, имеющие характер синусоидальных стоячих волн с узлами смещения на концах. На струне укладывается при этом целое число полуволн:

*λ*

*l* = *n*

##### 2

*πu*

= *n , n* = 1*,* 2*, . . .*

*ω*

*Частоту n-го собственного колебания (n-го обертона) легко вычис-* лить:

*n*

2*l*

*ρS*

*ω* = *nπ* ✓ *F , ν*

*n*

*l*

*ρS*

= *n* ✓ *F*

*n* = 1*,* 2*, . . . (4.96)*

*Если частота внешней поперечной синусоидальной силы совпадает* с частотой того или иного собственного колебания струны, возникает явление резонанса. При этом образуется стоячая волна того же вида, что и при соответствующем собственном колебании.

*Прuхu2К,цение нрu,цuJьнuй нuJны через 'раницу ,цнух сре,ц.* Пусть плоскость *x* = 0 *является границей раздела двух сред, обладаю-* щих различными упругими свойствами. Величины, относящиеся к сре- де, находящейся слева от плоскости раздела, будем отмечать индексом 1, величины, относящиеся к среде, находящейся справа от плоскости раздела, - индексом 2. Пусть слева приходит упругая волна:

*s*1 = *A*1 cos(*ωt* − *k*1*x*)*. (4.97)*

*Здесь s*1 *- смещение в направлении оси x. Что происходит на границе?* Ответить на этот вопрос можно, исходя из физических условий на границе. Во-первых, сплошность и непроницаемость одного вещества

*в другое, выражаемая уравнением*

*s*1(0*, t*) = *s*2(0*, t*)*, (4.98)*

*согласно которому смещения по обе стороны границы (x* = 0*) равны.* Во-вторых, равенство действия и противодействия, т. е. равенство на- пряжений, выражаемое уравнением

*σ*1(0*, t*) = *σ*2(0*, t*)*. (4.99)*

*Предположим, что волна проникает из первой среды во вторую:*

*s*2 = *A*2 cos(*ωt* − *k*2*x*)*, (4.100)*

*но в первой среде все происходит так, как будто нет второй среды,* т. е. остается справедливым (4.97). Подставляя (4.97), (4.100) в (4.98),

*(4.99), находим*

*где*

*A*1 = *A*2*, A*1 = *γA*2*,*

√

*E*2*k*2

*E*2*cl*1

*E*2*ρ*2

*γ* = *E*1*k*1 = *E*1*cl*2 = √*E ρ*

1

1

*.*

*Здесь cl - скорость продольных волн. Отметим, что величину* √*Eρ* =

= *ρcl часто называют кустичдским сопротивлднидм среды. Эти урав-* нения, однако, несовместимы, т. к. противоречат одно другому, за ис- ключением тривиального случая отсутствия границы:

*γ* = 1*.*

*При γ* = 1 *обоим условиям (4.98), (4.99) можно удовлетворить, если* принять (как учит опыт), что в первой среде к первоначальной (па- дающей) волне добавляется при наличии второй среды отраженная волна

l

*A*′ cos(*ωt* + *k*1*x*)

1

*и что, следовательно, при наличии второй среды*

*s*1 = *A*1 cos(*ωt* − *k*1*x*) + *A*′ cos(*ωt* + *k*1*x*)*. (4.101) Подставляя (4.100), (4.101) в (4.98), (4.99), находим*

1

*A*1 + *A*′ *A*1 − *A*′

1

1

= *A*2*,*

= *γA*2

*. (4.102)*

*Уравнения (4.102), где неизвестными являются A*′ *и A*2*, всегда совмест-* ны. При заданной амплитуде падающей волны *A*1 *уравнения (4.102)* однозначно определяют амплитуды отраженной и проходящей волн:

1

*A*′ = 1 − *γ A*1*, A*2 = 2

*A*1*. (4.103)*

##### 1 1 + *γ*

1 + *γ*

*Заметим, что*

*k*2 = *λ*1 = *cl*1 *.*

*k*1 *λ*2

*cl*2

*Длины волн в обеих средах различны. Длина волны больше в той* среде, где больше скорость распространения. Введем обозначения

*q*′ *q*2

*R* = *, T* = *.*

1

*q*1 *q*1

*Величины R и T естественно назвать коэффициднтом отр ждния и коэф- фициднтом прохожздния (проникновения). Нетрудно убедиться в том, что*

1 *γ* 2

−

*R* =

##### 1 + *γ*

4*γ*

*, T* = (1 + *γ*)2 *. (4.104)*

*Как и следовало ожидать,*

*R* + *T* = 1*.*

*Это равенство является следствием закона сохранения энергии:*

*q*′ + *q* = *q .*

1 2 1

*При γ* = 0 *и γ* = *имеем R* = 1*, T* = 0*: вся энергия возвращается в* первую среду. При *γ* = 1 *имеем R* = 0*, T* = 1*: вся энергия проходит во* вторую среду. Заметим, что формулы (4.104) не меняются при замене *γ на* 1*/γ. Это означает, что энергетические коэффициенты отражения* и прохождения не зависят от того, с какой стороны границы приходит падающая волна.

∞

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. Гл. VI, Х,*

*§§ 81385.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. Гл. 135.*

*3. Крауфорд Ф. Волны. - М.: Наука, 1974. Гл. 137.*

*4. Горелик Г.С. Колебания и волны. - М.: ГИФМЛ, 1959. Гл. I3VI.*

*5. Киттелъ Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. - М.: Наука, 1983.*

## *Рабuта 1..4.1*

### *Изучение физического маятника*

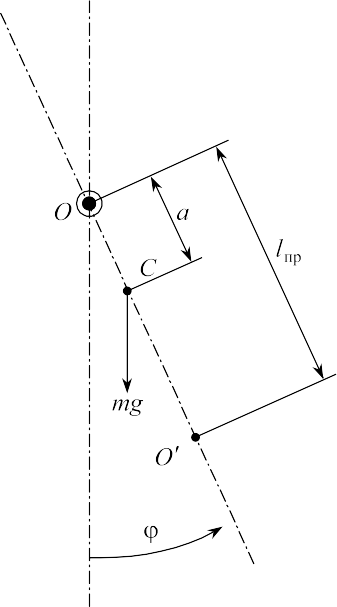
*Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физиче- ского маятника от его момента инерции.*

*В работе используются: физический маятник (однородный сталь- ной стержень), опорная призма, математический маятник, счетчик числа колебаний, линейка, секундомер.*

*\_lис. 1. Физический маятник*

*Физическим маятником называют* любое твердое тело, которое под дей- ствием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизон- тальной оси. Движение маятника описы- вается уравнением

*d*2*ϕ*



*I dt*2 = *M, (1)*

*где I - момент инерции маятника, ϕ -* угол отклонения маятника от положе- ния равновесия, *t - время, M - момент* сил, действующих на маятник.

*В данной работе в качестве физиче-* ского маятника (рис. 1) используется од- нородный стальной стержень длиной *l.* На стержне закрепляется опорная приз- ма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно пере- мещать вдоль стержня, меняя таким об- разом расстояние *OC от точки опоры ма-* ятника до его центра масс. Пусть это рас- стояние равно *a. Тогда по теореме Гюй-*

*генса-Штейнера (2.31) момент инерции маятника*

*ml*2

*I* =

##### 12

+ *ma*2*,*

*где m - масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на ма-* ятник,

*M* = −*mga* sin *ϕ.*

*Если угол ϕ мал, то* sin *ϕ* ≈ *ϕ, так что*

*M* ≈ −*mgaϕ.*

*В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний* без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для *I и M в* (1), получим уравнение

*где*

*ϕ*¨ + *ω*2*ϕ* = 0*, (2)*

*ω*2 = *ga*

2

*a*2 + *l*

##### 12

*. (3)*

*Решением этого уравнения является функция (4.15):*

*ϕ*(*t*) = *A* sin(*ωt* + *α*)*.*

*Амплитуда колебаний A и начальная фаза α зависят от того, как воз-* буждаются колебания маятника, т. е. определяются начальными усло- виями задачи, а частота колебаний *ω согласно (3) определяется только* ускорением свободного падения g и параметрами маятника *l и a.*

*Период колебаний равен*

2*π* г11� *a*2 +

*T* =

*ω*

= 2*π*

12 *. (4)*

*ag*

*l*2

*Мы видим, что период малых колебаний физического маятника не* зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохронность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравне- нию (2). Движение маятника описывается этим уравнением прибли- женно - в той мере, в какой справедлива использованная при выводе

*(2) формула* sin *ϕ ϕ.*

≈

*Период колебаний математического маятника определяется форму-*

*лой (4.39):*

✓

*T* ′ = 2*π l ,*

*g*

′

*где l*′ *- длина математического маятника. Поэтому величину*

*l*2

*lllр* = *a* + 12*a (5)*

*называют приведенной длиной физического маятника. Точку O*′*, отсто-* ящую от точки опоры *O на расстояние lllр, называют центром качания* физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обра- тимы, т. е. при качании маятника вокруг точки *O*′ *период будет таким* же, как и при качании вокруг точки *O.*

*Исследование справедливости это-* го утверждения является хорошим ме- тодом проверки теории. Еще один ме- тод заключается в проверке правиль- ности формулы (4). Входящую в эту формулу величину *a можно изменять,* передвигая опорную призму по стерж- ню. В данной работе в качестве ма- тематического маятника используется свинцовый шарик, подвешенный на



*\_lис. 2. Mатематический маятник*

*двух расходящихся нитях, как это по-* казано на рис. 2. Длину нитей можно изменять, наматывая нити на ось.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Определите диапазон амплитуд, в пределах которого период T колеба-* ний маятника можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на некоторый угол *ϕ*1 *( 10*◦*) и измерьте время 100 колебаний. Число колебаний измеряет-* ся электрическим или механическим счетчиком, а время - секундо- мером. Для уменьшения ошибки отсчета времени секундомер лучше

∼

*всего включать и выключать в момент прохождения маятника через* положение равновесия. По результатам опыта найдите период колеба- ний *T*1*.*

*Повторите опыт, уменьшив начальное отклонение в 1,5-2 раза, а за-*

*тем уменьшите амплитуду еще во столько же раз. Если в пределах точ-* ности измерения периоды совпадут, для дальнейших измерений можно выбирать любое значение начального отклонения, меньшее *ϕ*1*. Если* этого не произошло, исследуйте поведение маятника при еще меньших углах.

*Подумайте, что вносит основную ошибку в определение периода, и* постарайтесь уменьшить эту погрешность.

*2. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуйте зависимость* периода колебаний *T от расстояния a между точкой опоры и центром* масс. Постройте график функции *T* 2*a от a*2*. Аппроксимируя получен-* ную зависимость прямой линией, найдите по этому графику величины

*g/*4*π*2 *и l*2*/*12*, используя формулу (4). Сравните найденное значение g* с табличным, а величину *l - с результатом непосредственных измере-* ний.

*3. Для одного из положений призмы подберите длину математического* маятника так, чтобы в пределах точности измерений периоды колеба- ний обоих маятников совпали. Измерьте длину математического ма- ятника и сравните ее с приведенной длиной физического маятника, вычисленной по формуле (5).

*4. Проверьте на опыте обратимость точки подвеса (опоры) и центра кача-* ния физического маятника. Подумайте, при каких положениях опор- ной призмы эта проверка выполняется более точно.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. При каких упрощающих предположениях выведена формула (4)?*

*2. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебаний маятника минимален?*

*3. Как будет вести себя физический маятник, если совместить точку его под- веса с центром масс?*

*4. С какой целью в данной работе математический маятник подвешивается на двух нитях?*

*5. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса3Штейнера.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 30, 33, 35, 36,*

*40, 41.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 52, 59, 124.*

## *Рабuта 1..4.2*

### *Определение ускорения свободного падения* при помощи оборотного маятника

*Цель работы: определить величину ускорения свободного падения, пользуясь оборотным маятником.*

*В работе используются: оборотный маятник, счетчик числа коле- баний, секундомер, штангенциркуль с пределом измерений 1 м.*

*Свободным падением называют движение тела вблизи поверхности* Земли, при котором можно не учитывать силы сопротивления, возни- кающие в среде, окружающей тело. Ускорение свободного падения, ко- торое вблизи поверхности Земли обычно обозначают g, определяется массой тела *m и силой F, действующей на тело,*

*F-*

*-g* =

*. (1)*

*m*

*Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной.* В этой системе на тело, кроме гравитационных сил, действуют еще центробежная сила и сила Кориолиса. Последняя всегда направлена перпендикулярно к скорости движения и изменяет только направление скорости, но не ее величину. Под ускорением свободного падения обыч- но понимается тангенциальная (касательная) к траектории движения компонента ускорения, и сила Кориолиса при этом не учитывается. Очевидно, что для покоящегося на поверхности Земли тела сумма си- лы притяжения к Земле и центробежной равна силе реакции опоры, то есть весу тела.

*Сила притяжения тела к Земле определяется произведением его* массы *m на напряженность поля тяготения Земли, которая обычно* обозначается *-g*0*:*

*F-*0 = *m-g*0*. (2)*

*Напряженность поля тяготения определяется распределением масс* в Земле. Если бы Земля представляла собой шар постоянной плотно- сти, то внутри шара напряженность росла пропорционально расстоя- нию от центра Земли (линейно), а вне шара падала бы обратно про- порционально квадрату расстояния от центра Земли. В действительно- сти Земля не очень однородна. Плотность ее растет с глубиной. Из-за этого напряженность поля тяготения даже немного увеличивается с глубиной, примерно до 2800 км (при этом расстояние до центра Земли

*около 3600 км), а затем начинает падать по линейному закону (про-* порционально расстоянию от центра). Над поверхностью Земли рас- пределение напряженности гравитационного поля близко к распреде- лению вне однородного шара. На высоте полета спутников (порядка 300 км) напряженность поля тяготения меньше, чем у поверхности Зем- ли, примерно на 10%. Наблюдения за движением спутников позволяют измерять распределение поля тяготения и анализировать распределе- ние масс в Земле, что используется, в частности, для поиска полезных ископаемых.

*Кроме сил притяжения к Земле, действуют еще силы притяжения к* Луне и Солнцу, но вклад их в полную напряженность гравитационного поля очень мал, хотя они в глобальных масштабах вызывают такие заметные явления, как приливы.

*Вращение Земли вокруг своей оси привело к ее деформации за счет* центробежных сил. Расстояние от центра Земли до полюса примерно на 21 км меньше расстояния до экватора, которое равно 6 378 140 км. Для тел, вращающихся вместе с Землей, центробежные силы, как уже было сказано выше, объединяют с силами тяготения. Суммарная на- пряженность поля, обозначаемая g и равная ускорению свободного па- дения, обычно и приводится в таблицах распределения ускорения сво- бодного падения по поверхности Земли. На полюсе g = 983*,*2155 *см/с*2*,* а затем уменьшается с уменьшением широты, и на экваторе g =

= 978*,*0300 *см/с*2*. Это приводит, например, к тому, что маятниковые*

*часы на экваторе за сутки отстанут от аналогичных часов на полю-*

*се на 3,8 минуты. Направление этого поля всегда перпендикулярно к* поверхностям водоемов и очень мало отличается от направления на центр Земли.

*Неоднородность Земли в горизонтальном направлении также при-* водит к локальным изменениям g. Большое количество очень точных и длительных измерений на поверхности Земли показало, что g меняется также со временем. Периодические изменения, связанные с лунными

*приливами, равны примерно* 2*,*49 10−4 *см/с*2*, а с солнечными - по-* рядка 9*,*6 10−5 *см/с*2*. Такого же порядка изменения, происходящие* в течение года, связаны с геологическими процессами внутри Земли

·

·

*(так называемые вековые изменения).*

*Измерения g на поверхности Земли и составление гравиметриче-* ских карт используются для поиска полезных ископаемых и изучения внутреннего строения Земли.

*Первые измерения g с точностью до* 10−3 *см/с*2 *(миллигал) выпол-* нены были в начале века с помощью оборотных маятников. Для по- лучения такой точности периоды колебаний маятников должны быть

*измерены с точностью до* 10−6 *с, а приведенные длины - до 1 микро-* на. Современные методы измерения полей g делятся на динамические и статические. К динамическим относятся измерения с помощью ма-

*ятников, в том числе и оборотных. Измерения с помощью маятников* могут производиться с достаточной точностью только в стационарных лабораториях и требуют большого времени. Таких же стационарных условий требует измерение g с помощью струнного гравиметра, в кото- ром частота колебаний струны зависит от натяжения ее грузом в поле тяжести.

*В последнее время благодаря увеличению точности измерений рас-* стояний и времен стали применяться прямые методы измерения ускоре- ния падающих тел. Использование лазерных интерферометров для из- мерения пути падающего в вакуумной трубе тела, снабженного уголко- вым отражателем, и атомных часов позволило определить абсолютное

*значение ускорения свободного падения с точностью до* 3 10−6 *см/с*2*.*

·

*Динамические методы позволяют измерять абсолютные значения уско-*

*рения свободного падения. Статические методы позволяют измерять* относительное изменение ускорения свободного падения с точностью до 1*,*5 10−5 *см/с*2 *и основываются на измерении деформации пружин,* на которых подвешены грузики, либо на закручивании горизонтально

·

*закрепленных нитей (или торсионов: двух параллельно натянутых ни-* тей) под действием рычагов с грузиками. Для большей точности (мень- шего влияния изменений температуры) используются пружины и нити из кварца. Точные абсолютные измерения этими способами затрудне- ны из-за отклонения зависимости между деформацией пружины и на- грузкой на нее от линейной (закона Гука). Измеренные относительные изменения g привязываются к ряду опорных точек, в которых получе- ны абсолютные значения динамическими методами. Такими методами создаются гравиметрические карты.

*Период колебаний физического маятника определяется форму-* лой (4.38):

✓

*T* = 2*π I*

*mga*

*. (3)*

*Здесь I - момент инерции маятника относительно оси качания, m -* масса маятника, *a - расстояние от центра масс до оси качания.*

*Приведенная длина физического маятника, равная длине математи-* ческого маятника, имеющего такой же период колебаний, выражается формулой (4.40):

*I*

*lllр* = *ma. (4)*

*Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень* высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удается. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для g.

*Метод оборотного маятника основан на* том, что период колебаний физического ма- ятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, т. е. в точку, отсто- ящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.



*Применяемый в настоящей работе обо-* ротный маятник (рис. 1) состоит из сталь- ной пластины (или стержня), на которой укреплены две однородные призмы П1 *и П*2*.* Период колебаний маятника можно менять при помощи подвижных грузов Г1*, Г*2 *и Г*3*.* Допустим, что нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды ко- лебаний маятника *T*1 *и T*2 *на призмах П*1 *и*

*П*2 *совпадают, т. е.*

*T*1 = *T*2 = *T* = 2*π I*1

✓

*mgl*1

= 2*π I*2

*mgl*2

✓

*, (5)*

*где l*1 *и l*2 *- расстояния от центра массы* маятника до призм П1 *и П*2*.*

*\_lис. 1. Oборотный маятник*

*Условием этого, очевидно, является равенство приведенных длин,* т. е. равенство величин *I*1*/ml*1 *и I*2*/ml*2*. По теореме Гюйгенса-Штей-* нера

*I*1 = *I*0 + *ml*2*, I*2 = *I*0 + *ml*2*, (6)*

1 2

*где I*0 *- момент инерции маятника относительно оси, проходящей че-* рез его центр масс (и параллельной оси качаний). Исключая из (5) и

*(6) I*0 *и m, получим формулу для определения g:*

4*π*2

*g* = *T* 2 (*l*1 + *l*2) = 4*π*

2 *L . (7)*

*T* 2

*Здесь L* = *l*1 + *l*2 *- расстояние между призмами П*1 *и П*2*, которое* легко может быть измерено с высокой точностью (0,1 мм) при помощи

*большого штангенциркуля (но не путем суммирования измерений l*1 *и l*2*, погрешность получения которых в работе велика и составляет* несколько миллиметров).

*Заметим, что формула (7) следует из формул (5) и (6) лишь при* условии, что

*l*1 l= *l*2*, (8)*

*так как при l*1 = *l*2 *равенства (5) и (6) удовлетворяются тождественно.*

*При выводе формулы (7) мы полагали, что T*1 = *T*2*. На самом деле* точного равенства периодов добиться, конечно, невозможно. Тогда

*T*1 = 2*π*

2

1 *, T*2 = 2*π*

* *I*0 + *ml*

*mgl*1

2

2 *.*

* *I*0 + *ml*

*mgl*2

*Из этих равенств имеем*

*T* 2*gl*1 − *T* 2*gl*2 = 4*π*2(*l*2 − *l*2)*,*

1

2

1

2

*откуда*

2 2

2 *l* − *l* 2

*g* = 4*π* 1 2 = 4*π*

*l*1*T* 2 − *l*2*T* 2

*L*

*, (9)*

2

*T*

*где*

1 2 0

*l*1*T* 2 − *l*2*T* 2 *l*1

*T* 2 =

0

2

1

*l*1 − *l*2

2 = *T* 2 +

*l*1 − *l*2

(*T*1 + *T*2)(*T*1 − *T*2)*. (10)*

*Погрешность определения g может быть найдена из (9):*

*σg* = ✓( *σL* ) + 4

*L*

*g*

2

*σT*0 *T*0

2

*. (11)*

*Входящая в эту формулу погрешность σT*0 *сама должна быть вы-* числена. Прежде чем это сделать, исследуем, как зависит период коле- баний от расстояния *l между центром масс и осью качаний маятника.* Для этого выразим момент инерции *I с помощью (6) через I*0*:*

* *I*0 + *ml*2

*T* = 2*π*

*. (12)*

*mgl*

*График этой зависимости изображен на рис. 2. При l* → 0 *период T*

*стремится к бесконечности по закону l*−1*/*2*. При l* → ∞ *о* *н стремится*

*к бесконечности как l*1*/*2*. Период минимален при lmin* =

*I*0*/m. При*

*T > Tmin каждое значение T достигается при двух разных значениях*

*T*

*T*min

*l*2 *l*min *l*1 *l*

*\_lис. 2. Зависимость периода колебаний маятника от расстояния между центром масс и осью качаний*

*l: одно из них больше, а другое меньше lmin. Эти разные значения и* были использованы в формулах (5) - (7). Из графика видно, что при изменении *T величины l*1*, l*2 *сближаются или удаляются друг от друга.*

*Найдем зависимость погрешности в определении T*0 *от разности*

*l*1 *l*2*. Для этого исследуем, например, как зависит σT*0 *от погрешности* в определении *T*1*. Дифференцируя первое равенство (10) и полагая T*2 *неизменным, мы получаем*

−

*l*1 *l*1 *T*1

2*T*0(*dT*0)*T*2 = *l*1 − *l*2 2*T*1*dT*1*,* (*dT*0)*T*2 = *l*1 − *l*2 · *T*0 *dT*1*.*

*Аналогично при неизменном T*1 *получим*

*l*2 *T*2

(*dT*0)*T*1 = − *l*1 − *l*2 · *T*0 *dT*2*.*

*Рассмотрим случай, когда l*1 *и l*2 *близки друг к другу. Знамена-* тель формулы при этом мал и погрешность в определении *T*0 *резко* возрастает. Тот же вывод справедлив для пересчета погрешности *dT*2 *в погрешность dT*0 *(при неизменном T*1*). Поэтому период колебаний* следует выбирать так, чтобы *l*1 *и l*2 *заметно отличались друг от друга* (при различии их в 1,5 раза погрешность *T*0 *превышает погрешность* *T*1 *менее чем на порядок).*

*Получим формулу для расчета погрешности dT*0*. Обратимся для*

*этого ко второму равенству (10). Заметим, что T*1 ≈ *T*2*, так что T*1 − *T*2

*мало. Поэтому при не слишком малых l*1 *l*2 *второй член в этой фор-* муле играет роль небольшой поправки.

−

*Следовательно, если учитывать ошибки измерений l*1 *и l*2 *( но не T*1 *и T*2*), то эти ошибки будут умножаться на малую величину T*1 − *T*2 *и* ими при расчете погрешностей *σT*0 *можно пренебречь (даже несмотря* на то, что эти ошибки могут быть равны нескольким миллиметрам,

*что обычно получается в данной работе). Учитывая, что погрешности в* измерении периодов *T*1 *и T*2 *независимы и примерно равны друг другу,* окончательно найдем, используя для расчета ошибок общую формулу (1.33):

*σT*0

*l*2 + *l*2

≈ *l*1 − *l*2 *σT , (13)*

1 2

*где σT - погрешность измерения периодов.*

*Мы видим, таким образом, что погрешность измерения слабо зави-* сит от точности, с которой выполняется равенство *T*1 = *T*2*. Поэтому* нет смысла тратить время на уточнение этого равенства после того, как периоды оказались равны друг другу с точностью нескольких про-

*центов.*

*Заметим, наконец, что отношение l*1*/l*2 *не должно быть слишком* большим. В самом деле, *l*1 *всегда меньше расстояния между призмами*

*L. Для больших l*1*/l*2 *величина l*2 *неизбежно оказывается малой, и пе-* риод колебаний резко возрастает (напомним, что *I всегда больше I*0*).* При этом увеличивается время измерения и растет роль сил трения,

*которые при выводе формулы (3) не учитывались.*

*Поясним это утверждение. Роль трения определяется отношением* работы, производимой этими силами за период колебаний, к запасу ко- лебательной энергии в системе. Работа сил трения слабо зависит от *l*2 *(она равна произведению момента сил трения, почти не зависящего от* *l*2*, на угол качания, который от l*2 *совсем не зависит). Запас колеба-* тельной энергии равен потенциальной энергии, которую приобретает маятник при поднятии его центра масс, т. е.

*WкоJ* = *mgl*2(1 − cos *ϕ*)*,*

*где ϕ - угол отклонения маятника. При уменьшении l*2 *значение WкоJ* падает.

*Таким образом, мы приходим к выводу, что отношение l*1 *к l*2 *не* должно быть ни слишком малым, ни слишком большим; желательно,

*чтобы выполнялось условие*

*l*1

1*,*5 *<*

*l*2

*<* 3*. (14)*

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Схема устройства оборотного маят-* ника изображена на рис. 1. Расстояние *L между опорными призмами* П1 *и П*2 *не меняется. Расстояния l*1 *и l*2 *можно менять, перемещая* грузы Г1*, Г*2 *и Г*3*.*

*Для определения числа колебаний используется счетчик, состоя-* щий из осветителя, фотоэлемента и пересчетного устройства. Легкий стержень, укрепленный на торце маятника, пересекает световой луч дважды за период. Возникающие в фотоэлементе импульсы поступают

*на пересчетный прибор. Если n*1 *и n*2 *- начальное и конечное значе-* ния показаний прибора за время наблюдения *t, то измеренное число* периодов, очевидно, равно *N* = (*n*2 *n*1)*/*2*, а период колебаний со-* ставляет *T* = *t/N. Время t измеряется секундомером, установленным* на пересчетном приборе. Для определения расстояний *l*1 *и l*2 *маятник* снимают с консоли и располагают горизонтально на специальной под-

−

*ставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно найти* положение центра масс. Расстояния от него до опорных призм и есть искомые *l*1 *и l*2*. Если они достаточно сильно отличаются друг от друга* (условие (14)), а периоды *T*1 *и T*2 *близки, то, как следует из формулы* (10), нет необходимости определять *l*1 *и l*2 *с высокой точностью.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Ознакомьтесь с конструкцией оборотного маятника.*

*2. Определите рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период* колебаний *T маятника можно считать не зависящим от амплитуды.* Для этого установите маятник на одной из опорных призм и, откло-

*нив маятник из положения равновесия на некоторый угол ϕ*1 *( 10*◦*),* измерьте время 100 полных колебаний. Найдите период колебаний *T*1*.* Повторите опыт, уменьшив начальное отклонение в 1,5-2 раза, и опре- делите период *T* ′*. Если в пределах точности измерений окажется, что*

∼

1

*T*1 = *T* ′*, то для дальнейших опытов можно выбрать любую амплитуду*

1

*ϕ, не превосходящую ϕ*1*. Если же T*1 = *T* ′*, то следует выбрать в каче-* стве *ϕ*1 *меньший из использованных углов и повторить измерения. Не* рекомендуется выбирать начальную амплитуду более 10◦*, так как при* этом может возникнуть скольжение призмы по опорной площадке.

1

l

*3. Установите, каким образом периоды колебаний T*1 *и T*2 *(при опоре на* призмы П1 *и П*2 *соответственно) зависят от положения грузов Г*1*, Г*2 *и Г*3*. При этом достаточно измерять время 10-15 полных колебаний.* В результате этих опытов необходимо выяснить:

*а) какой из грузов оказывает большее влияние на T*1 *и T*2*, а какой -* меньше;

*б) какой из грузов существеннее влияет на разность периодов* *T*1 *T*2 *. Изменяет ли перемещение грузов периоды T*1 *и T*2 *в одну* или в разные стороны? (Опыты проделать для всех грузов).

| − |

*4. Перемещая груз, наиболее сильно влияющий на величину разности* *T*1 *T*2 *(обычно это Г*2*), добейтесь грубого совпадения периодов. Опре-* делите *T*1 *и T*2 *по 10-15 полным колебаниям маятника. Сняв маятник* с консоли, определите положение его центра масс и величины *l*1 *и l*2*.* Как указывалось выше, они должны отличаться не менее чем в 1,5 и не более чем в 3 раза.

| − |

*5. Меняя положение груза, менее заметно влияющего на периоды, добей-* тесь совпадения *T*1 *и T*2 *с точностью не хуже процента. Проверьте,* удовлетворяют ли в этом случае значения *l*1 *и l*2 *неравенствам (14).* Окончательное измерение величин проведите по 200-300 полным коле-

*баниям маятника. Попутно убедитесь, что трение не оказывает суще-* ственного влияния на колебания, т. е. что за 200-300 колебаний ампли- туда маятника заметно (в 2-3 раза) не уменьшается.

*6. По результатам измерений и формулам (9) и (10) вычислите ускоре-* ние свободного падения. Оцените погрешность. Сравните результат с табличными данными.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Как влияют на точность эксперимента колебания температуры, сила трения, амплитуда колебаний маятника?*

*2. При каком расстоянии от опорной призмы до центра масс период колебаний маятника минимален?*

*3. Покажите, что точка опоры маятника и его центр качания лежат по разные стороны от центра масс.*

*4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса3Штейнера.*

*5. Покажите, что при перемещении оси качаний в центр качаний период коле- баний маятника не должен изменяться.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 35, 36, 41, 66.*

*2. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. §§ 50, 124.*

## *Рабuта 1..4.3*

### *Исследование нелинейных колебаний* длиннопериодного маятника

*Цель работы: определение зависимости периода колебаний маятни- ка от амплитуды.*

*В работе используются: установка с длиннопериодным маятни- ком, секундомер.*

*Ураннение ,цни2Кенин мантника. Используемый в работе маятник* представляет собой два одинаковых груза, закрепленных на жестком стержне, способном вращаться вокруг горизонтальной оси, немного смещенной относительно центра масс системы. На рис. 1 показано рас- положение грузов и стержня, приведены используемые обозначения.

*Колебания маятника происходят под действием момента силы тя-* жести. Движение маятника будем описывать временной зависимостью угла отклонения *ϕ от положения равновесия. Величина момента Mт си-* лы тяжести, возвращающего маятник в положение равновесия, может быть выражена следующим образом:

*M* = − *m* + *ρ L* + *l* *g*(*L* − *l*) sin *ϕ.*

2

*т*

*Силу сопротивления, приводящую к* затуханию колебаний маятника, будем считать пропорциональной скорости. При небольших скоростях это согласуется с экс- периментальными данными. В нашем слу- чае сила сопротивления определяется вяз- костью воздуха, а также незначительным моментом силы трения в подшипниках оси маятника, вклад которого можно не учиты- вать. Поэтому момент *Mс силы сопротивле-* ния равен



*Mс* = −*b*(*L*2 + *l*2)*ϕ*˙*,*

*где b - некоторая постоянная.*

*\_lис. 1. Длиннопериодный маятник*

*Момент инерции I маятника относительно оси вращения равен сум-*

*ме моментов инерции его элементов относительно той же оси:*

*I* = *m*(*L*2

+ *l*2) + *ρ*

*L*3 + *l*3

*,*

##### 3

*где m - масса каждого груза, которую считаем сосредоточенной, ρ -* масса стержня на единицу длины.

*В результате уравнение вращательного движения маятника*

*Iϕ*¨ = *Mт* + *Mс*

*принимает вид*

*Iϕ*¨ = − *m* + *ρ L* + *l* *g*(*L* − *l*) sin *ϕ* − *b*(*L*2 + *l*2)*ϕ*˙

2

*или*

*где*

0

*ϕ*¨ + 2*βϕ*˙ + *ω*2 sin *ϕ* = 0*, (1)*

*L*2 + *l*2 2 *L* + *l* *g*(*L* − *l*)

2*β* = *b*

*I и ω*0 =

*m* + *ρ*

2

*.*

*I*

*Если массой стержня можно пренебречь по сравнению с массой* грузов, то

2*β* = *b , ω*2 = *g L* − *l .*

*m* 0 *L*2 + *l*2

*МаJые кuJебанин. При небольших углах отклонения маятника мож-* но пренебречь разницей между углом *ϕ и его синусом. Заменяя в (1)* sin *ϕ на ϕ, получаем уравнение (4.27) для затухающих колебаний ма-* лой амплитуды:

*ϕ*¨ + 2*βϕ*˙ + *ω*2*ϕ* = 0*. (2)*

0

*Решение этого уравнения имеет вид (4.28)*

*ϕ* = *ae*−*βt* cos(*ωt* + *α*)*, (3)*

*где (см. (4.29))*

*ω*2 = *ω*2 − *β*2*. (4)*

*Постоянные a и α определяются начальными условиями.*

0

*Формула (4) показывает, что наличие затухания уменьшает частоту* и, следовательно, увеличивает период. Оценим относительную величи- ну этого эффекта, полагая затухание малым (*β*2 ≪ *ω*2*). Переписав* формулу (4) в виде ∆*ω*2 = −*β*2*, получим*

∆*T* ∆*ω*

2*ω*∆*ω*

∆*ω*2 *β*2

*β*2*T* 2

*T* = −

*ω* = −

2*ω*2 = − 2*ω*2 = 2*ω*2 =

8*π*2 *.*

*Используя (4.31) и (4.32), окончательно имеем*

∆*T δ*2 *ai*

*T* = 8*π*2 *, где δ* = *βT* = ln *ai*+1 *. (5)*

*Формула (5) позволяет экспериментально оценить вклад затухания* в изменение периода, так как величины максимальных отклонений *ai* *легко измеряются. В дальнейшем будем предполагать, что этот вклад* мал, и изменение периода обусловлено преимущественно нелинейно- стью. Это предположение следует проверить экспериментально.

*НеJинейные кuJебанин. Уравнение колебаний маятника без затуха- ния получим, полагая в (1) β* = 0*:*

*ϕ*¨ + *ω*2 sin *ϕ* = 0*. (6)*

0

*Это уравнение является нелинейнымl. Если ограничиться небольшими* углами отклонений, при которых sin *ϕ ϕ, то уравнение (6) становится* линейным и совпадает с уравнением гармонического осциллятора (4.4).

≈

*Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды можно* найти, проинтегрировав соотношение

*dϕ*

*dt* =

*, (7)*

*ϕ*˙

*например, за четверть периода. Чтобы найти зависимость угловой ско-* рости *ϕ*˙ *от угла отклонения маятника ϕ, домножим (6) на ϕ*˙*:*

*ϕ*˙*ϕ*¨ + *ϕ*˙*ω*2 sin *ϕ* = 0

0

*и проинтегрируем один раз2:*

*ϕ*˙2 2

2 + *ω*0 (cos *ϕm* − cos *ϕ*) = 0*, (8)*

*здесь ϕm - угол максимального отклонения маятника. Отсюда*

*ϕ*˙2 = 2*ω*2(cos *ϕ* − cos *ϕ* ) = 4*ω*2 (sin2 *ϕm* − sin2 *ϕ* ) *,*

0 *m* 0

*ϕ* ✓

2 2

sin2 *ϕ*

*ϕ*˙ = 2*ω*0 sin *m*

1 − *. (9)*

2

2

sin2 *ϕm*

2

*1 Напомним, что линейными называются уравнения, в которые функция и ее производные входят только в первой степени. l: уравнении (6) нелинейность связа- на с синусом. l: других случаях могут быть полиномы или более сложные функции.*

*2 Mожно также получить (8) из закона сохранения энергии.*

*Используя (9) и (7), получаем*

*T* = 4

*T/*4

*ϕm*

*dt* = 4

*ϕm*

*dϕ* 4 *dϕ*

= ✓

*. (10)*

*ϕ*˙ 2*ω*0 sin *ϕm*

2

2

0 0 0

1 −

##### sin2 *ϕ*

sin2 *ϕm*

2

*Введём новую переменную θ:*

##### sin2 *ϕ*

sin2 *θ* = 2 *. (11)*

sin2 *ϕm*

2

*Тогда для периода колебаний T можно получить*

##### 2

*T* = *T*0 ·

*π*

*π/*2

*dθ*

✓

1 − sin2 *ϕm* sin2 *θ*

0

*. (12)*

2

*Здесь T*0 = 2*π/ω*0 *- период малых (линейных) колебаний маятника.* Интеграл (12) в элементарных функциях не выражается, но его можно вычислить, разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Тогда зависимость периода колебаний от амплитуды, связанная с нелинейно- стью, будет иметь вид

*T* = 1 + 1 sin2 *ϕm* + 9 sin4 *ϕm* + *. . . (13)*

#### *T*0 4 2 64 2

*Отсюда для достаточно малых углов отклонения получаем*

*T* ≈ *T*0

2

##### 1 + *m*

*ϕ*

16

*. (14)*

*На рис. 2 изображены точное решение (13) (сплошная линия) и прибли-* жение (14) (пунктир). Видно, что при амплитудах порядка 90◦ *погреш-* ность приближения составляет примерно 2%. Сам эффект при таких амплитудах составляет 15-20%, что может быть измерено простым се- кундомером для маятников с периодом порядка 10 секунд.

*На период колебаний маятника оказывают влияние как затухание,* так и нелинейность уравнения (6). Мы рассмотрели вклад каждого из этих факторов по отдельности, считая, что другой отсутствует. В дей- ствительности они проявляются одновременно, и период колебаний яв- ляется некоторой сложной функцией декремента и амплитуды. Если,



*\_lис. 2. Зависимость периода колебаний маятника от амлитуды*

*однако, изменение периода невелико, можно воспользоваться форму-* лой Тейлора для функции двух переменных

*f* (*x, y*) ≈ *f* (0*,* 0) +

*и получить, учитывая (5) и (14):*

*∂f* (0*,* 0)

*x* +

*∂x*

*∂f* (0*,* 0)

*y*

*∂y*

*T* (*δ*2*, ϕ*2 ) ≈ *T*0

*m*

##### 1 +

*δ*2 2

8*π*2 + 16

*ϕ*

*m*

*, (15)*

*т. е. в первом приближении вклады от затухания и нелинейности сум-* мируются независимо.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Подберите расположение грузов на стержне таким образом, чтобы пе-* риод колебаний маятника составил несколько секунд.

*2. Отклоните маятник на 80-90*◦ *и отпустите без толчка, включив секун-* домер в момент начала движения.

*3. При каждом максимальном отклонении маятника запишите в таблицу* номер отклонения *n (количество периодов, прошедших с начала дви-* жения), угол максимального отклонения *ϕn и показание секундомера.*

*4. Повторите эксперимент несколько раз с различными периодами коле-* баний.

*5. Оцените влияние затухания. Для этого постройте график зависимости* ln *ϕn от n и по его наклону определите логарифмический декремент за-* тухания *δ (см. (5)). По формуле (5) определите вклад в изменение пери-* ода, обусловленный затуханием, и убедитесь, что он мал по сравнению с реально наблюдаемым эффектом (или с ожидаемым, рассчитанным

*по формуле (14)). В противном случае при интерпретации следующего* графика необходимо, пользуясь (15), ввести поправку на затухание и

*использовать вместо периода малых колебаний T*0

*величину T*0

2

− 8*π*2 *.*

*δ*

*6. Постройте график зависимости периода колебаний маятника T от квад-* рата максимального угла отклонения *ϕ*2 *(в радианах). Сравните ре-* зультат с предсказаниями теории (формула (14)).

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Как меняется период колебания маятника при увеличении затухания?*

*2. Как устроен длиннопериодный маятник, имеющий большие периоды колеба- ний при небольших размерах? Можно ли в работе вместо него использовать обычный маятник?*

*3. Как изменяется период колебания маятника при увеличении амплитуды ко- лебаний?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Киттелъ Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. - М.: Наука, 1983. С. 251.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. §§ 2.4, 3.2.*

## *Рабuта 1..4..4*

### *Исследование свободных колебаний* связанных маятников

*Цель работы: изучение колебательной системы с двумя степенями свободы.*

*В работе используются: установка с двумя одинаковыми мате- матическими маятниками, бифилярно подвешенными на натянутую горизонтально струну, секундомер, измерительная линейка.*

*Перед началом работы прочтите о связанных маятниках во введе-* нии к данному разделу.

*Измерения производятся на установке, изображенной на рис. 1.* Один конец струны прикреплен к вертикальной стойке установки,

*а другой конец переброшен через неподвижный блок и натянут с по-* мощью груза массой *M. Точки струны A и B неподвижны. В точках* *C и D, которые делят расстояние между A и B на три равные части* (каждая длиной *a), подвешены одинаковые математические маятники* массой *m и длиной l. Каждый маятник подвешен на двух нитях в плос-* кости струны (бифилярно), чтобы колебания маятников происходили в плоскостях, перпендикулярных струне. Сила натяжения струны на- много больше веса маятников (*M m). Вертикальная составляющая* смещения струны никак не сказывается на движении маятников при малых отклонениях. Горизонтальная составляющая смещения струны, хотя она и мала по сравнению со смещениями маятников, осуществля- ет слабую связь между маятниками.

≫

*На рис. 2 показаны смещения точек C и D струны и отклонения* маятников в вертикальной (рис. 2а) и горизонтальной (рис. 2б) плос- костях.

*При небольших отклонениях маятников для силы натяжения под-* веса маятника *T имеем (рис. 2а)*

*mg* ≈ *T. (1)*

*Для движения маятников в горизонтальном направлении (рис. 2)*

*mx*¨1 = −*T* sin *ϕ*1 ≈ −*T x*1 − *x*3 ≈ −*mg x*1 − *x*3 *, (2)*

*l*

*l*

*mx*¨2 = −*T* sin *ϕ*2 ≈ −*T x*2 − *x*4 ≈ −*mg x*2 − *x*4 *. (3)*

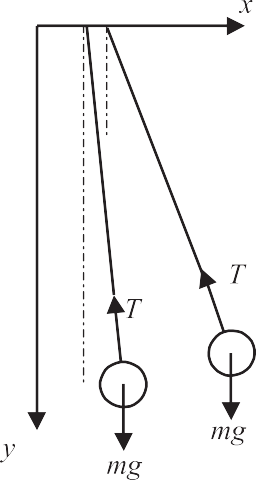
*l*

*l*

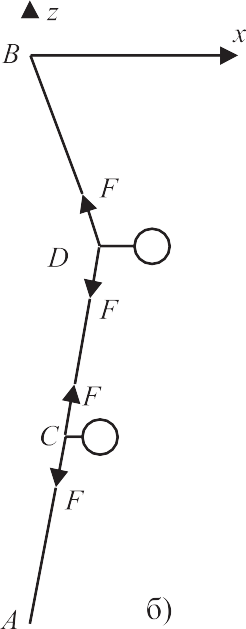




*\_lис. 1. Oбщий вид установки*



*\_lис. 2. Oтклонения маятников и струны а) вид вдоль струны, б) вид сверху*



*Связь между натяжением струны и натяжением подвеса получаем* из рис. 2:

*T x*1 − *x*3 = *F x*3 + *F x*3 − *x*4 *, (4)*

*l a a*

*T x*2 − *x*4 = *F x*4 + *F x*4 − *x*3 *. (5)*

*l a a*

*Введем безразмерный параметр*

*T a m a*

*σ* = = *,*

*F l M l*

*который в нашем случае много меньше единицы (слабая связь). Тогда* из (4) и (5) получаем

*σx*1 = (2 + *σ*)*x*3 − *x*4*, σx*2 = (2 + *σ*)*x*4 − *x*3*. (6) Пренебрегая σ по сравнению с 2, получаем*

*x*3 = *σ*

2*x*1 + *x*2

##### 3

*, x*4 = *σ*

*x*1 + 2*x*2

##### 3

*. (7)*

*Уравнения движения маятников примут вид*

*g g*

*x*¨1 + *l* (1 − *σ*)*x*1 = *σ* 3*l* (*x*2 − *x*1)*, (8)*

*g g*

*x*¨2 + *l* (1 − *σ*)*x*2 = *σ* 3*l* (*x*1 − *x*2)*. (9)*

*Заметим, что система уравнений (4.59), (4.60) может быть записана* в виде

*или*

*g*

##### *ϕ*¨1 + *ϕ*1 =

*l*

*g*

##### *ϕ*¨2 + *ϕ*2 =

*l*

*g*

*l ε*(*ϕ*2 − *ϕ*1)*,*

*g*

*l ε*(*ϕ*1 − *ϕ*2)

*ϕ*¨1 + *ω*2*ϕ*1 = *ω*2*ε*(*ϕ*2 − *ϕ*1)*, (10)*

0

0

*ϕ*¨2 + *ω*2*ϕ*2 = *ω*2*ε*(*ϕ*1 − *ϕ*2)*. (11)*

0

0

*Уравнения (10), (11) с точностью до обозначений совпадают с уравне-* ниями (8), (9). Введем обозначения

*g* (1 − *σ*) = *ω*2*, σ g*

*l*

0

3*l*

= *ω*2*ε.*

0

*Отсюда находим*

*или*

*σ*

##### 1 − *σ*

= 3*ε*

*т. е.*

*σ*(1 + *σ*) ≈ 3*ε,*

*σ* ≈ 3*ε (для слабой связи).*

*Система уравнений (8), (9) приобретает вид*

*x*¨1 + *ω*2*x*1 = *ω*2*ε*(*x*2 − *x*1)*, (12)*

0

0

*x*¨2 + *ω*2*x*2 = −*ω*2*ε*(*x*2 − *x*1)*. (13)*

0

0

*Таким образом, все рассуждения, приведенные во введении к дан-* ному разделу, полностью относятся к данной лабораторной работе. В частности, время, необходимое для перекачки энергии от одного ма- ятника к другому и обратно, равно (4.78):

2*π*

*τ* =

*ω*0*ε*

*. (14)*

*Можно видеть, что параметр связи*

##### 1

*ε* =

1 −

3

*ω*2*l*

*В силу (15) соотношение (14) приобретает вид*

0

*g*

*. (15)*

*τ* = 6*π* ≈ 6*π Ml* ✓ *l . (16)*

0

*ω*0(1 − *ω*2*l/g*)

*ma*

*g*

*Формулу (16) можно проверить экспериментально, измеряя парциаль-* ную частоту маятника, его длину и время обмена энергией.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Измерьте длину маятников, расстояние между неподвижными точка-* ми струны и точками подвеса маятников. Запишите массу маятников и массу груза, натягивающего струну.

*2. Измерьте периоды нормальных колебаний (мод). Для измерения пе-* риода *T*1 *колебаний маятников в фазе (синфазных) отклоните их на*

*одинаковые углы (примерно 30*◦*) в одну сторону и одновременно отпу-* стите. Напомним, что отсчеты надо производить в моменты прохож- дения положения равновесия маятников (примерно по 10 периодам).

*Повторите измерения 2-3 раза и усредните результаты. Для измерения* периода *T*2 *колебаний маятников в противофазе (встречных) началь-* ные отклонения маятников должны быть сделаны в разные стороны.

*3. Измерьте периоды парциальных колебаний. Для этого надо отцепить* или положить один маятник на подставку.

*4. Проведите измерения при раскачивании одного маятника другим. Для* этого в начальный момент отклоните только один маятник. Измерьте период биений *τ.*

*5. Проверьте справедливость соотношения*

##### 1 1

=

*τ T*1

1

+ *. (17)*

*T*2

*6. Повторите предыдущие измерения при других натяжениях струны.*

*7. Постройте график зависимости периода биений от натяжения струны.*

*8. Проведите сравнение полученных результатов с теоретическими расче-* тами по формуле (16).

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Приведите примеры колебательных систем с двумя степенями свободы.*

*2. Что такое нормальные колебания (моды)?*

*3. Какие колебания называются парциальными?*

*4. При каком начальном условии возникает поочередная раскачка маятников?*

*5. Выведите формулу (17).*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Киттелъ Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. - М.: Наука, 1983.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. Гл. 2. § 2.5.*

## *Рабuта 1..4.5*

### *Изучение колебаний струны*

*Цель работы: исследование зависимости частоты колебаний стру- ны от величины натяжения, а также условий установления стоячей волны, получающейся в результате сложения волн, идущих в проти- воположных направлениях.*

*В работе используются: рейка со струной, звуковой генератор, постоянный магнит, разновесы.*

*Основное свойство струны - гибкость - является следствием ее* большой длины по сравнению с поперечными размерами. Даже стру- ны, изготовленные из жестких материалов, практически не сопротив- ляются изгибу, если размер изгибаемого участка значительно больше поперечного размера струны. Это позволяет в дальнейшем при рас- смотрении струны не учитывать изгибные напряжения.

*Горизонтально расположенная струна с закрепленными концами*

*провисает в поле тяжести, если она плохо натянута. При увеличении* натяжения струна вытягивается практически в прямую линию. Сила натяжения при этом значительно превосходит вес струны. Поэтому для прямой натянутой струны в дальнейшем силами тяжести будем пренебрегать.

*Натянутая струна с жестко закрепленными концами удобна для* изучения колебательных процессов. Это связано с тем, что в струне можно непосредственно наблюдать простейшие типы колебаний и волн, измерять их параметры и сравнивать результаты наблюдения с результатами теоретических расчетов.

*Движение элементов струны может быть вызвано изменением ее* формы или передачей ей импульса. Натяжение струны стремится вер- нуть её в начальное прямолинейное положение, и это приводит к тому, что возникает движение элементов струны. Возмущения бегут вдоль струны.

*В силу волнового уравнения (4.94) скорость распространения попе-* речной волны на струне равна

✓

*u* = *F , (1)*

*ρl*

*где F - сила натяжения струны, ρl - масса струны на единицу длины.*

*При заданной частоте ν длина волны*

*u*

*λ* = *. (2)*

*ν*



6

*2*

*3*

*4*

*1*

*100 90 80 70*

*0*

*5*

*\_lис. 1. Cхема экспериментальной установки*

*Частоты собственных колебаний струны определяются формулой* (4.96):

*u*

*νn* = *n* 2*l , (3)*

*где l - длина струны, n - число полуволн.*

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Схема экспериментальной установ-* ки изображена на рис. 1. На массивной металлической рейке 1 установ- лены опора 2 и магнит 3, которые можно перемещать вдоль рейки, а также неподвижная опора 4. Один конец струны закреплен в изоля- торе опоры 4. От него струна проходит между полюсами магнита и через опору 2, которая дает возможность струне перемещаться в гори- зонтальном направлении, неподвижный блок и соединяется с чашкой 5, на которую помещают грузы. Такое устройство необходимо для на- тяжения струны. К концу струны, закрепленному в изоляторе опоры 4, и к массивной металлической рейке 1 подводится переменное напря- жение от звукового генератора 6. Движение струны вызывается силой Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле. Ча- стота действия силы, раскачивающей струну, равна частоте колебаний тока в струне, то есть частоте генератора.

*В натянутой струне возникнут колебания и по ней побегут волны,* которые отразятся от опор 2 и 4 и, сложившись друг с другом, создадут стоячую волну, если на длине струны уложится целое число полуволн. В реальных условиях колебания струны существуют потери энер- гии, связанные с трением струны о воздух, передачей некоторого дви- жения опорам, необратимыми процессами в самой струне и, возможно, какими-то другими процессами. Чтобы колебания струны происходили долго, нужно подводить энергию. В стационарном режиме подводимая

*энергия равна потерям энергии. В данной установке сила Ампера не* только возбуждает, но и поддерживает колебания в струне.

*Поток энергии при этом распространяется по всей струне. Однако* в чисто стоячей волне распространение энергии невозможно (см. вве- дение к данному разделу). Наличие отличного от нуля коэффициента бегучести необходимо поэтому принципиально. Реально это приводит к размытию узлов стоячей волны. Если потери энергии за период коле- баний малы по сравнению с запасом колебательной энергии в системе, то коэффициент бегучести значительно меньше единицы:

*A*1 − *A*2 1*. (4)*

≪

*A*2

*Здесь A*1 *- амплитуда падающей волны, A*2 *- амплитуда отраженной* волны. В этом случае можно пользоваться соотношениями, получен- ными для чисто стоячей волны. Заметим, что величину *A*1 *A*2 *можно* оценить по размытию узлов стоячей волны, она равна половине вели- чины размытия. Амплитуда стоячей волны в пучности равна 2*A*2*.*

−

*Если соотношение (4) выполняется не достаточно хорошо, то на-*

*до уменьшить величину подводимой от генератора энергии. При этом* уменьшение потерь энергии происходит быстрее, чем уменьшение энер- гии в волне.

*Необходимо сделать еще одно замечание. Действие силы Ампера* должно привести к поляризованным волнам, плоскость колебания ко- торых перпендикулярна направлению магнитного поля. В реальных условиях на установке не всегда получаются линейно поляризованные волны.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Изучите конструкцию установки. Установите опору 2 (рис. 1) так, что-* бы колеблющийся участок струны имел длину *L не менее 80 см.*

*2. Включите питание звукового генератора. Дайте ему прогреться 5-10* минут.

*3. При работе с генератором ЗГ-18 установите нулевое значение шкалы* частот генератора. Для этого лимбы <Частота> и <Расстройка> уста- новите на нуль. Вращая ручку <Установка нуля>, устраните биения стрелки. При этом стрелка прибора должна оставаться на нуле. По- сле этого лимб <Установка нуля> трогать не следует. Прибор готов к работе.

*4. Нагрузите струну.*

*5. Перемещая магнит и вращая ручку изменения частоты генератора, по-* лучите картину стоячих волн. (Передвижение магнита вдоль струны

*перемещает точку приложения внешней силы, которая не должна по-* падать на узел, но должна быть к нему достаточно близка).

*6. Увеличивая частоту звукового генератора при некотором постоянном* натяжении струны, получите стоячие волны, соответствующие *n* = 1*,* 2, 3, ..., дойдя, по крайней мере, до *n* = 6*. Фиксируя каждый раз пока-* зания лимба звукового генератора, повторите процесс при понижении, а затем снова при повышении частоты. Проделайте эти измерения при

*различных натяжениях струны (не менее пяти).*

*7. При проведении эксперимента проверьте справедливость условия (4),* измерив величину размытости узла и амплитуду в пучности. Если оно выполняется недостаточно хорошо, надо уменьшить выходную мощ- ность звукового генератора.

*8. Для каждого значения натяжения струны F постройте график зави-* симости частоты резонанса *νn от n. По наклону прямой с помощью* формулы (3) определите скорость *u волн в струне при данном натяже-* нии. Оцените погрешность результатов.

*9. Постройте график зависимости u*2 *от F. По наклону прямой с помо-* щью формулы (1) определите погонную плотность струны *ρl. Оцените* погрешность результата и сравните вашу оценку с действительной по- грешностью. Истинное значение *ρl указано на установке.*

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Что такое продольные и поперечные волны? Напишите уравнение бегущей волны.*

*2. Выведите уравнение стоячей волны. Дайте определение пучности и узла сто- ячей волны. Как происходит передача энергии по струне?*

*3. Покажите, что скорость распространения поперечных волн по струне равна*

✓

*u* = *F/ρl. Чему равна эта скорость в ваших измерениях?*

*4. Как происходит отражение бегущей волны от жестко закрепленного кон- ца струны и от конца, который может свободно двигаться в направлении, перпендикулярном к направлению натяжения струны? Как меняется фаза отраженной волны?*

*5. При каком условии влиянием бегущей волны на картину колебаний стру- ны можно пренебречь? Как это условие можно проверить при проведении эксперимента?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Стрелков С.П. Механика. - М.: Наука, 1975. С. 1373143.*

*2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. С. 1503154.*

*3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 81, 84.*

*4. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. Гл. 5. § 5.6.*

## *Рабuта 1..4.6*

### *Измерение скорости ультразвука в жидкости* с помощью ультразвукового интерферометра

*Цель работы: измерение в различных средах длины волны ультра- звука с помощью ультразвукового интерферометра, вычисление ско- ростей распространения ультразвука и адиабатической сжимаемости сред.*

*В работе используются: ультразвуковой интерферометр, генера- тор стандартных сигналов Г4-42, микроамперметр.*

*Механические колебания с частотой выше 20 кГц называются уль-* тразвуковыми, в отличие от звуковых колебаний они не воспринима- ются человеческим ухом.

*Ультразвуковые колебания, так же как и звуковые, могут распро-* страняться в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых те- лах они распространяются в виде продольных и поперечных волн, а в жидких и газообразных - только как продольные волны. Скорость распространения ультразвуковых волн зависит от упругих свойств и плотности вещества, в котором распространяется звук. Поэтому, зная скорость ультразвука и плотность среды, можно определить ее упругие константы.

*В работе определяется скорость ультразвука в жидкости. Существу-* ет несколько методов ее измерения. Используемый в работе метод уль- тразвукового интерферометра принадлежит к числу наиболее точных. В интерферометре между излучателем и жесткой отражающей по- верхностью устанавливается стоячая волна. (См. введение к разделу).

*Расстояние между излучателем и отражающей поверхностью должно*

*содержать целое число полуволн:*

*λ*

*l* = *n* 2 *, cs* = *λνn, (1)*

*где cs - скорость распространения ультразвуковой волны, νn - часто-* та.

*Интерферометр можно рассматривать как резонатор, который на-* строен на частоты, получаемые из (1):

*ν* = *ncs . (2)*

*n* 2*l*

*При таких частотах генератора в интерферометре устанавливаются* стоячие волны. Эти частоты называются резонансными. Чтобы перей- ти от одной резонансной частоты к соседней, надо расстояние *l между* излучателем и отражающей поверхностью *l изменить на*

∆*l* =

*λ*

*. (3)*

##### 2

*Формула (3) имеет более общую применимость, чем (1). В самом деле,* равенство (1) было получено в предположении, что оба торца у стол- ба жидкости закрыты абсолютно упругими (полностью отражающими звук) стенками. Это условие никогда не выполняется точно. Сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами никогда поэтому в точности не равен *π.*

*Формула (3), определяющая расстояние между двумя последова-*

*тельными резонансами, не зависит от условий отражения на дне и на* крышке сосуда. Коль скоро резонансные условия один раз были достиг- нуты, при увеличении длины столба на *λ/*2 *путь звуковой волны, про-* ходимой между двумя последовательными отражениями от крышки, увеличивается на *λ, а фаза волны изменяется на* 2*π, и, следовательно,* резонансные условия снова оказываются выполненными.

*Рассмотрим некоторые способы возбуждения ультразвуковых ко-* лебаний. Обычно такие колебания возбуждаются с помощью кварце- вой пластинки, помещенной между обкладками плоского конденсато- ра (обкладки, как правило, приклеиваются или напыляются на поверх- ность кварца). При возникновении поля в конденсаторе размер квар- цевой пластинки изменяется (пьезоэффект). Подавая на конденсатор электрическое поле нужной частоты, возбуждают звуковые колебания кварцевой пластинки, которые затем передаются жидкости.

*Обычно пьезокварц помещают в жидкость, чтобы не вводить лиш-* них отражающих звук поверхностей. В нашем случае пластинка при- жата ко дну сосуда. При этом колебания передаются в жидкость через дно, которое в идеальных условиях должно быть узлом смещения.

*Легко видеть, однако, что возбуждать колебания можно вблизи уз-* ла, но не в самом узле, так как в узле нет перемещений и, следователь- но, не производится работа. В то же время от излучателя к жидкости должна передаваться энергия, компенсирующая естественные потери в жидкости и на отражающих поверхностях. В этом нет, однако, ни- какого противоречия. Дно сосуда является узлом колебаний лишь в интерферометре с абсолютно упругими стенками и при отсутствии по- терь в жидкости. Но если энергия не тратится, ее не следует и вос- станавливать. В реальных установках потери энергии неизбежны, но

*и дно сосуда не должно быть и не является совсем неподвижным.*

*Как уже отмечалось, в случае резонанса и при полном отсутствии* потерь в интерферометре амплитуда бегущих волн, движущихся вверх и вниз, одинакова, а их сумма дает стоячую волну. В реальном случае амплитуда *Aннeрx волны, движущейся от излучателя, несколько пре-* восходит амплитуду *Aнниз встречной волны. Сложение этих волн дает* стоячую волну с амплитудой 2*Aнниз и бегущую волну с амплитудой* *Aннeрx Aнниз. Бегущая волна осуществляет передачу энергии и <раз-* мывает> картину в узлах стоячей волны.

−

*Обратимся к измерению длины волны звука. Из изложенного ясно,* что измерение сводится к определению расстояния между двумя со- седними положениями крышки интерферометра, при которых выпол- няются резонансные условия в столбе жидкости. Удвоив полученное расстояние, найдем, согласно формуле (3), длину ультразвуковой вол- ны.

*После того как длина волны ультразвука в интерферометре изме-* рена, следует найти скорость звука. Это можно сделать с помощью формул (1). Как видно из формул, кроме длины волны, необходимо знать частоту колебаний кварцевой пластинки, которая совпадает с частотой напряжения, подводимого к пьезокварцу.

*Зная cs, можно определить сжимаемость χ исследуемой жидкости:*

*c* = 1 *, χ* = 1

*, (4)*

*s*

*где ρ - плотность жидкости. Так как процесс распространения звуко-* вых колебаний является адиабатическим, в эту формулу входит адиа- батическая сжимаемость жидкости *χад. У жидкостей адиабатическая* и изотермическая сжимаемости отличаются мало, например, для во- ды - всего на 1%, поэтому часто между ними можно не делать разли- чия.

*s*

*χρ*

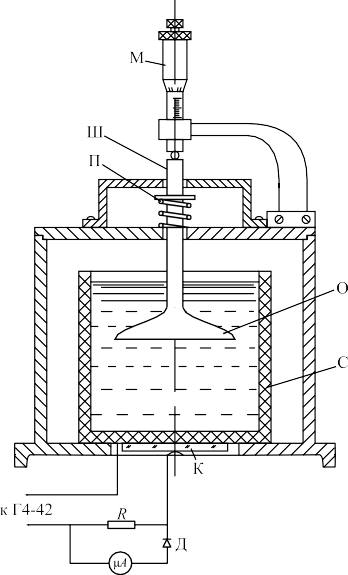
*ρc*2

*При растворении в воде сильных электролитов, последние диссо-* циируют на ионы. Электрическое поле ионов ориентирует близлежа- щие молекулы воды, что приводит к резкому снижению сжимаемости. Грубо говоря, каждый ион оказывается в центре сферы, коэффициент сжимаемости которой практически равен нулю. Наличие таких сфер приводит к уменьшению общего коэффициента сжимаемости жидко- сти, в результате чего скорость ультразвука существенно возрастает.

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Используемый в работе интерфе-* рометр (рис. 1) представляет собой цилиндрический сосуд С, к дну которого приклеена кварцевая пластинка К. Пластинка вырезана из

*кварца специальным образом (так называемый <Х-срез>) и обладает* пьезоэлектрическими свойствами. При сжатии и растяжении пластин- ки на гранях, к которым приложено усилие, возникают электрические заряды противоположных знаков. В интерферометре используется об- ратный эффект: к посеребренным горизонтальным граням пластинки подводится переменное электрическое напряжение, что приводит к ее колебаниям по толщине. Переменное напряжение подается от генера- тора стандартных сигналов Г4-42, достаточно точно (с погрешностью менее 1%) проградуированного по частоте. В генератор вмонтирован резонансный усилитель, настроенный на собственную частоту кварце- вой пластинки (1 МГц). Амплитуда напряжения, подаваемого на пье- зокварц, достигает нескольких десятков вольт.

*Толщина дна интерферометра вы-*

*брана так, чтобы при рабочей частоте* в слое, образующем дно сосуда, насту- пали резонансные явления.

*Возбуждаемая пьезокварцем поверх-* ность дна интерферометра является ис- точником ультразвука в исследуемой жидкости. Такой способ возбуждения колебаний позволяет проводить иссле- дования с любыми жидкостями, в том числе и с электропроводящими, не опа- саясь замыкания электродов пластинки или ее порчи.

*Величина тока, потребляемого ко-* леблющейся кварцевой пластинкой, кон- тролируется микроамперметром. Мик- роамперметр через полупроводниковый диод Д включен параллельно сопротив- лению *R, установленному в цепи пла-*

*стинки. Он служит для определения ре-*

*зонанса. При наступлении резонансных* условий мощность, потребляемая пьезо-

*\_lис. 1. Cхема ультразвукового интерферометра*

*кварцем, а следовательно, и сила тока в его цепи резко увеличиваются.* Отражателем в интерферометре является диск О из нержавеющей стали. Его нижняя плоская поверхность параллельна дну интерферо- метра. При помощи микрометрического винта М диск перемещается в жидкости вверх и вниз. Пружина П поднимает шток Ш вверх до упора

*в торец микрометрического винта.*

*ЗАДАНИЕ*

*1. Включите генератор Г4-42 и дайте ему прогреться несколько минут. Ес-* ли в интерферометре была жидкость, слейте ее, открыв зажим шланга. Выберите нужный рабочий диапазон частот Г4-42, т. е. диапазон, поз- воляющий получать частоту 1 МГц (собственную частоту кварцевой пластинки).

*Меняя частоту генератора, добейтесь резонанса в кварцевой пла-* стинке, - ток через микроамперметр должен при этом пройти через максимум. Ручкой <Установка уровня выхода> подберите амплитуду колебаний на Г4-42 так, чтобы стрелка микроамперметра отклонялась примерно на 2/3 шкалы прибора. Перемещая отражатель сверху вниз при помощи микрометрического винта, наблюдайте за изменениями показаний микроамперметра. Если при этом в показаниях прибора на- блюдаются периодические изменения, следует убедиться в том, что их причиной является установление резонанса (например, по постоянству смещений между последовательными максимумами). Может оказать- ся, что резонанс в интерферометре не наблюдается. Это еще не означа- ет, что прибор неисправен, так как для наблюдения резонанса в стол- бе воздуха нужны, вообще говоря, более чувствительные индикаторы, чем при работе с жидкостями.

*Причиной небольших отклонений стрелки прибора может быть при-* косновение или отрыв руки от микрометрического винта. При этом изменяется электрическая ёмкость прибора, и поэтому несколько сби- вается настройка резонансной частоты. Если не отрывать пальцев от микрометрического винта и плавно вращать его, то такие колебания стрелки не должны наблюдаться.

*2. Зажмите выпускной шланг и через воронку заполните сосуд интерфе-* рометра водой. Поднимите отражатель, следя за тем, чтобы его рабо- чая поверхность не вышла из воды. Убедитесь в том, что на рабочей поверхности отражателя нет пузырьков воздуха. Проверьте установ- ку резонансной частоты. Плавно перемещая отражатель вниз, следите за колебаниями тока через микроамперметр и по числу максимумов найдите число полуволн, укладывающихся на пути, пройденном отра- жателем.

*Постройте график, откладывая по оси абсцисс номер максимума, а* по оси ординат - его положение. Проверьте, что все эксперименталь- ные точки хорошо ложатся на прямую. Используя соотношение (3), определите по графику скорость ультразвука в воде.

*Рассчитайте по формуле (4) адиабатическую сжимаемость среды*

*χад. Повторите опыт 4-5 раз. Оцените погрешность в определении cs*

*и χад.*

*3. Аналогичные измерения проведите, заполняя сосуд растворами NaCl с* концентрацией 5, 10, 15 и 20%. Плотность растворов измерьте ареомет- ром. Постройте график зависимости *cs и χад от концентрации раство-* ра. Определите по нему неизвестную концентрацию и *χад контрольного* раствора. Перед заливкой контрольного раствора сполосните им сосуд интерферометра.

*Закончив работу, обязательно сполосните сосуд интерферометра чи-* стой водой.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. Какие механические колебания называются ультразвуковыми?*

*2. Что такое продольные и поперечные волны и какова их природа? В каких веществах они могут распространяться?*

*3. Напишите выражение для бегущей волны.*

*4. При каких условиях возможна интерференция волн?*

*5. Выведите формулу, определяющую условия возникновения резонанса в ин- терферометре. Как влияют граничные условия на эту формулу?*

*6. При каких условиях возникает стоячая волна? Что такое узлы и пучности? Как происходит передача энергии в волне?*

*7. Почему в растворах электролитов скорость распространения ультразвука больше, чем в чистой жидкости?*

*8. Вместо металлического отражателя в интерферометре можно использовать свободную поверхность исследуемой жидкости. При этом высоту столба мож- но плавно менять, выпуская жидкость из интерферометра. Какая разность фаз устанавливается между падающей и отраженной волнами смещения на границе раздела жидкость-воздух?*

*9. Какие изменения следовало бы сделать в интерферометре, чтобы можно было производить измерения в газах?*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Механика. - М.: Наука,* *1969.*

*Гл. XVI, §§ 1253129.*

*2. Хайкин С.Э. Физические основы механики. - М.: Наука, 1971. Гл. XIX,*

*§§ 1533155.*

*3. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. Гл.* *5. §§ 5.235.5.*

## *Рабuта 1..4.7*

### *Определение упругих констант жидких*

*и твердых тел по скорости распространения ультразвука*

*Цель работы: измерить скорости звука в жидких и твердых телах и по этим измерениям определить упругие константы исследуемых тел.*

*В работе используются: ультразвуковой дефектоскоп, измери- тельная стойка, набор образцов, миллиметровая линейка, призмати- ческие щупы.*

*Ультразвуком называются механические колебания, частота кото-* рых превышает 20 кГц. Самым простым типом ультразвуковых волн являются плоские волны, среди которых различают продольные и по- перечные. У продольных волн смещение частиц происходит в том же направлении, в котором движется волна, у поперечных оно перпенди- кулярно движению волны. Продольные ультразвуковые волны могут распространяться в любых веществах. Поперечные волны распростра- няются только в твердых телах, в которых могут возникать напряже- ния сдвига.

*В обычных условиях скорость ультразвука в воздухе составляет*

*около 330 м/с, в воде 1500 м/с, в кварце 5700 м/с, в стали 6000 м/с.*

*Генерацин и ,цетектирuнание уJьтразнукuных нuJн. Одним из* распространенных методов определения скорости ультразвука являет- ся импульсный метод. В исследуемую среду посылается короткий уль- тразвуковой импульс и измеряется время пробега *t, которое тратит* ультразвук на прохождение некоторого расстояния *l. Скорость ультра-* звука определяется по очевидной формуле:

*l*

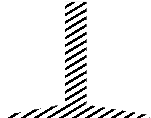
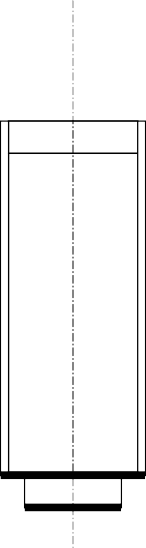
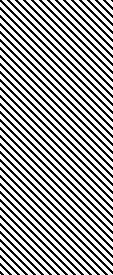
*cs* = *t . (1)*

*Ультразвуковой импульс генерируется пьезоэлектрическим излуча-* телем. Импульс регистрируется приемником, расположенным на неко- тором расстоянии от излучателя. Вместо приемника можно установить рефлектор (рис. 1). В этом случае отраженный от рефлектора импульс возвращается к излучателю, который теперь не только генерирует, но и регистрирует ультразвук. При использовании рефлектора установ- ленное расстояние проходится дважды, поэтому в формуле (1) следует подставить удвоенное расстояние между излучателем и рефлектором.

*Для измерения времени прохожде-* ния импульса удобно использовать элек- тронно-лучевой осциллограф, на трубке которого видны два импульса, возника- ющие в момент генерации и в момент возвращения сигнала. Время *t измеря-* ется по расстоянию между импульсами (скорость развертки осциллографа ка- либруется). Измеренная таким образом скорость ультразвука является группо- вой скоростью волн, отличной от их фазовой скорости, о которой мы гово- рили до сих пор. При отсутствии дис- персии (дисперсией называется зависи- мость фазовой скорости распростране- ния волн от их длины волны) эти две скорости равны друг другу.

*Обычно в качестве излучателей*

*используются пьезоэлектрические пла-* стинки из титаната бария (BaTi□3*). Что-* бы в исследуемом теле возбуждались как продольные, так и поперечные вол- ны, применяют так называемые призма-



*t*

Рефлектор

*l*

**~**

*\_lис. 1. Cхема, поясняющая импульсный метод измерения скорости ультразвука*

*тические щупы. В призматическом щупе (рис. 2) излучатель располо-* жен под некоторым углом *α к опорной поверхности прямоугольной* призмы, которую удобно делать из плексигласа. Излучатель возбужда- ет в плексигласе продольную волну, падающую под углом *α на границу* раздела плексиглас - исследуемое тело. При небольших углах падения после преломления на границе в исследуемом теле распространяются две волны - продольная и поперечная. Так как их скорости различны, то на экране осциллографа, кроме пускового, видны два отраженных импульса.

*Для передачи поперечных волн щуп должен быть приклеен к об-* разцу, жидкие смазки для этого не годятся.

*ЭкснериментаJьнан устанuнка. Для измерения скорости ультра-* звука в жидкостях используется стандартный дефектоскоп. (Прибор предназначен для определения глубины залегания дефектов в различ- ных изделиях). Генератор возбуждает в излучателе (изготовленном из титаната бария BaTi□3*) короткие импульсы высокочастотных колеба-* ний. Ультразвуковые импульсы передаются в образец через тонкий слой смазки и, отражаясь от противоположной границы образца, воз-

*вращаются в излучатель, который вновь преобразует их в электриче-* ские сигналы. После усилителя сигналы подаются на электронно-луче- вую трубку дефектоскопа. На экране трубки сигналы наблюдаются в виде импульсов: излучаемый - в начале развертки, отраженные - справа от него. Расстояние между импульсами пропорционально вре- мени *t прохождения ультразвука от излучателя до отражающей по-* верхности и обратно. Это расстояние измеряется при помощи метки (ступеньки на линии развертки), передвигаемой вдоль линии разверт- ки ручкой шкалы глубиномера.

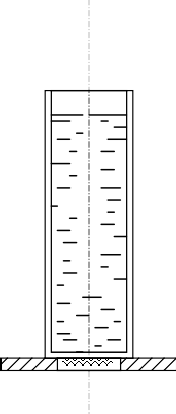
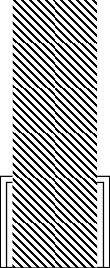
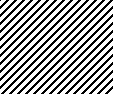
4





*l*





2

7

6

5

3

1

*\_lис. 2. 11ризматический щуп \_lис. 3. Cхема установки*

*Схема установки изображена на рис. 3. Излучатель 1, соединен-* ный экранированным кабелем с дефектоскопом 2, вмонтирован в дно

*3 измерительной стойки. С помощью поддерживающего цилиндра 4 на* стойке устанавливается исследуемый стержень или цилиндрический со- суд из нержавеющей стали с исследуемой жидкостью 5. Их контакт с излучателем осуществляется с помощью жидкого масла, передающе- го в образец только продольные волны. В твердых образцах импульс отражается от верхнего, свободного конца; при работе с жидкостями отражающей поверхностью служит изготовленный из нержавеющей стали поршень 6, высота поднятия которого над дном отсчитывается по шкале на его штоке 7. Для градуировки шкалы глубиномера ис-

*пользуется вода (скорость распространения cs* = 1497 *м/с при 25* ◦*C,* температурный коэффициент *dcs/dt* = 2*,*5 *м/(с*·*К)).*

*При измерении скорости ультразвука (и при градуировке прибора)* можно измерять интервал времени между излученным и отраженным

*сигналами или между двумя последовательно отраженными сигнала-* ми. Последний способ является предпочтительным, так как при этом результат не содержит ошибки, связанной с прохождением ультразву- ка через дно сосуда.

*Для измерения скорости распространения поперечных ультразву-* ковых волн (наряду с продольными) вместо измерительной стойки к дефектоскопу подключается установка с призматическим щупом. Об- разец имеет форму полуцилиндра. Щуп расположен на его оси (рис. 2), так что расстояния, проходимые в образце продольными и поперечны- ми волнами, одинаковы (они равны удвоенному радиусу полуцилин- дра) и не зависят от угла, под которым волны входят в образец. Аку- стический контакт щупа с образцом достигается с помощью тонкого слоя минерального воска или клея БФ-2. Эти вещества способны пере- давать в образец тангенциальные напряжения.

*ЗАДАНИЕ*

*1. Включите дефектоскоп в сеть переменного тока. Включение произво-* дится поворотом ручки <Яркость> по часовой стрелке.

*2. Прогрейте прибор 1-2 минуты, а затем ручками <Яркость> и <Фокус>* добейтесь наибольшей четкости линии развертки. Ручкой <Смещение Х> установите начало развертки около левого края экрана. Поставь- те переключатель <Частота> в положение <5 МГц>, что соответствует резонансной частоте излучателя. Остальные ручки установите в следу- ющие положения: <Электронная лупа> - в положение <Выкл.>, <Вид измерений> - в положение <Развертка плавно>, <Зона автоматическо- го контроля> - в крайнее правое положение, <Чувствительность> - в среднее положение, <ВРЧ> (временная регулировка чувствительно- сти) - в крайнее положение, <Мощность импульса> - в правое край- нее положение, <Отсечка> - в среднее положение, переключатель <I и I + II> - в положение <I>.

*3. Отградуируйте шкалу глубиномера. Для этого установите в измери-* тельную стойку сосуд с водой. Устанавливая сосуд или образец, не забудьте смазать жидким маслом поверхность излучателя! Переклю- чатель <Вид измерений> поставьте в положение <Д. Пр.>. Переклю- чатель <Диапазоны прозвучивания> установите на нужный диапазон (в соответствии с расстоянием *t от излучателя до поверхности отра-* жающего поршня). Градуировку прибора произведите по нескольким (5-6) значениям расстояний между излучателем и поршнем. Постройте градуировочный график, откладывая по одной из осей деления шка- лы глубиномера, а по другой - вычисленное значение времени пробега импульса. Расстояние *l измеряется по линейке на штоке отражающего* поршня. Скорость ультразвука в воде указана выше.

*4. Измерьте скорость распространения продольных колебаний cl ультра-* звука в образцах из различных материалов (сталь, алюминий, латунь, органическое стекло и т. д.) и в различных жидкостях (четыреххлори- стый углерод, масло). Длину *l образцов твердых тел измерьте милли-* метровой линейкой, а расстояние между дном сосуда и отражателем - по линейке на штоке поршня. Время прохождения импульса определи- те по шкале глубиномера с помощью градуировочного графика. Вычис- лите скорость распространения ультразвука в каждом из исследуемых материалов.

*Указание. При проведении опыта следует убедиться, что выбран-* ные вами для измерений импульсы действительно соответствуют двум последовательно отраженным импульсам. Помимо них на экране ос- циллографа обычно наблюдаются различные побочные импульсы, воз- никающие, например, из-за отражения непосредственно от нижней гра- ницы образца.

*При измерениях с самыми короткими образцами амплитуды отра-* женных импульсов мало отличаются друг от друга, тогда как для са- мых длинных образцов различие амплитуд двух соседних отраженных импульсов может оказаться существенным. Иногда для того, чтобы увидеть второй отраженный сигнал, приходится увеличивать чувстви- тельность усилителя (ручкой <Чувствительность>).

*5. Измерьте скорость распространения продольных cl и поперечных cτ* *волн в различных материалах (сталь, алюминий, латунь и т. д.), ис-* пользуя призматический щуп с таким углом падения *α (величина угла* указана на призме щупа), который обеспечивает введение в исследу-

*емое тело обоих типов волн. Время прохождения каждого импульса* определите по шкале глубиномера с помощью построенного ранее гра- дуировочного графика. Длину пути ультразвука измерьте миллимет- ровой линейкой.

*6. Вычислите коэффициент Пуассона µ, модуль Юнга E и модуль сдвига*

*G для исследуемых твердых тел с помощью формул*

*c* = *G,*

*τ ρ*

✓

*c* = *E*(1 − *µ*) *,*

##### *ρ*(1 + *µ*)(1 − 2*µ*)

✓

*l*

*E*

*G* = *.*

##### 2(1 + *µ*)

*Плотность материала ρ возьмите из таблиц.*

*7. Вычислите коэффициент адиабатической сжимаемости исследуемых* жидкостей, воспользовавшись формулой

##### 1

*χ* = *ρc*2 *.*

*l*

*8. Оцените погрешность всех полученных результатов и сравните их с* табличными значениями в справочниках.

## *КuнтрuJьные нuнрuсы*

*1. При определении скорости распространения ультразвука с помощью дефек- тоскопа на экране помимо последовательно отраженных импульсов наблю- даются побочные импульсы. Какие причины приводят к появлению этих импульсов? Как от них избавиться?*

*2. При измерении скорости ультразвука с помощью призматического щупа в результат вносится систематическая погрешность, возникающая из-за того, что между излучателем и исследуемым материалом находится клиновидная часть плексигласового щупа. Оцените величину этой погрешности, исходя из размеров щупа и образца.*

*3. Покажите, что коэффициент отражения ультразвуковой волны на границе двух сред не зависит от направления движения волны.*

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. - М.: Наука, 1996. §§ 78, 81, 83, 85.*

*2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Олъхов О.А. Основы физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. - М.: Физ- матлит, 2001. Ч. III. Гл. 5.*

*здл V*

# *ТАБЛИЦЫ*

*Т а б л и ц а* *1*

## *Оснuнные физические нuстuннные*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Величина* | *Обозначе-*  *ние или формула* | *Числовое значение* |
| *Скорость света в вакууме* | *c* | *299 792 458 м/с (точно)* |
| *Постоянная Планка* | *h*  п = *h/*2*π* | 34  6*,*62606876(52) · 10− 34 *Дж*·*с*  1*,*054571596(82)·10− *Дж*·*с* |
| *Постоянная Больцмана* | *k* | 23  1*,*3806503(24) · 10− *Дж/К* |
| *Постоянная Авогадро* | *NA* | 23 −1  6*,*02214199(47)· 10 *моль* |
| *Атомная единица массы* | *1 а.е.м* | 27  1*,*66053873(13) · 10− *кг* |
| *Газовая постоянная* | *R* = *kNA* | *8,314472(15) Дж/(моль*·*К)* |
| *Объем моля идеального газа при нормальных условиях*  *(T*0 = 273*,*15 *К,*  *P*0 = 101325 *Па)* | *V*0 = *RT*0  *P*0 | 3 *м*3  22*,*413996(39) · 10−  *моль* |
| *Гравитационная постоянная* | *G* | 11 2 2  6*,*673(10) · 10− *Н* · *м /кг* |
| *Элементарный заряд (заряд электрона)* | *e* | 19  1*,*602176462(63) · 10− *Кл*  10  4*,*8032042 · 10− *ед. СГСЭ* |
| *Удельный заряд электрона* | *e/me* | 11  1*,*758820174(71)· 10 *Кл/кг* |
| *Масса электрона* | *me* | 30  0*,*910938188(72) · 10− *кг* |
| *Масса протона* | *mp* | 27  1*,*67262158(13) · 10− *кг* |
| *Масса нейтрона* | *mn* | 27  1*,*67492716(13) · 10− *кг* |

*Т а б л и ц а 1 (продолжение)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Величина* | *Обозначе-*  *ние или формула* | *Числовое значение* |
| *Энергия покоя электрона* | 2  *mec* | *0,510998902(21) МэВ* |
| *Энергия покоя протона* | 2  *mpc* | *938,271998(38) МэВ* |
| *Энергия покоя нейтрона* | 2  *mnc* | *939,565330(38) МэВ* |

*В скобках указана погрешность последних знаков.*

*Длины:* Ангстрем

## *Внесистемные е,циницы*

*Т а б л и ц а* *2*

1 = 10−10 *м* = 10−8 *см* = 0*,*1 *нм*

*Астрономическая единица*

1 *а. е.* = 1*,*5 · 1011 *м* = 1*,*5 · 1013 *см*

*Световой год*

1 *св. год* = 9*,*5 · 1015 *м* = 9*,*5 · 1017 *см Парсек*

1 *пк* = 3*,*1 · 1016 *м* = 3*,*1 · 1018 *см*

*Давления:* Атмосфера (физическая)

1 *атм* = 760 *мм рт. ст.* = 101325 *Па* (*точно*)

*Энергии:*

*Эрг*

1 *эрг* = 10−7 *Дж*

*Калория*

1 *кал* = 4*,*1868 *Дж* (*точно*)

*Электрон-вольт*

1 *эВ* = 1*,*6021765 · 10−19 *Дж* = 1*,*6021765 · 10−12 *эрг*

*Температура, соответствующая энергии 1 эВ,*

#### 11605 *К*

*288 Таблицы*

## *Астрuфизические нuстuннные*

*Т а б л и ц а* *3*

*Масса Солнца*

*M* = 1*,*99 · 1030 *кг* = 1*,*99 · 1033 *г*

*с*

*Энергия, испускаемая Солнцем в 1 секунду, или светимость*

*L* = 3*,*86 · 1026 *Вт* = 3*,*86 · 1033 *эрг/с*

*с*

*Солнечная постоянная*

*E* = 1*,*35 · 103 *Вт/м*2 = 1*,*35 · 106 *эрг/*(*с* · *см*2)

*с*

*Радиус Солнца*

*R* = 6*,*96 · 105 *км* = 6*,*96 · 108 *м*

*с*

*Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли*

*α* = 0*,*92 · 10−2 *рад*

*с*

*Температура Солнца вблизи поверхности*

*T* = 5*,*9 · 103 *К*

*с*

*Масса Земли*

*M* = 5*,*98 · 1024 *кг* = 5*,*98 · 1027 *г*

*з*

*Средняя плотность Земли*

*ρ* = 5*,*52 · 103 *кг/м*3 = 5*,*52 *г/см*3

*з*

*Экваториальный (a) и полярный (b) радиусы Земли*

*a* = 6378 *км, b* = 6357 *км Средний радиус равновеликой сферы*

*R* = 6371 *км*

*Стандартное ускорение свободного падения на поверхности Земли g n* = 9*,*80665 *м/с*

2

*Среднее расстояние от Земли до Солнца*

*L* = 1 *а.е.* = 1*,*5 · 108 *км* = 1*,*5 · 1011 *м*

*з*

*Средняя температура поверхности Земли*

*Tз* = 300 *К*

*Средняя скорость движения Земли по орбите*

*v* = 30 *км/с* = 3 · 104 *м/с*

*з*

*Угловая скорость вращения Земли*

*ω* = 0*,*727 · 10−4 *рад/с*

*з*

*Космические скорости (1-я и 2-я) на поверхности Земли*

*v*1 = ✓*GM /R* = 7*,*9 *км/с* = 7*,*9 · 103 *м/с,*

*з*

*з*

*v*2 = *v*1 √2 = 11*,*2 *км/с* = 11*,*2 · 103 *м/с*

*Масса Венеры*

*MВ* = 0*,*82*Mз*

= 4*,*87 · 1024 *кг* = 4*,*87 · 1027 *г*

*Среднее расстояние от Венеры до Солнца*

*L* = 1*,*08 · 108 *км* = 1*,*08 · 1011 *м*

*В*

*Период обращения Венеры вокруг Солнца*

*TВ* = 225 *сут Радиус Венеры*

3 6

*RВ* = 0*,*99*Rз* = 6*,*3 · 10 *км* = 6*,*3 · 10 *м*

*Средняя плотность Венеры*

*ρ* = 4*,*7 · 103 *кг/м*3 = 4*,*7 *г/см*3

*В*

*Ускорение свободного падения на поверхности Венеры g В* = 0*,*84*g з* = 8*,*2 *м/с*

2

*Масса Марса*

24 27

*Mм* = 0*,*11*Mз* = 0*,*66 · 10 *кг* = 0*,*66 · 10 *г*

*Расстояние от Марса до Солнца*

*L* = (2*,*06 − 2*,*49) · 108 *км*

*м*

*Расстояние от Марса до Земли*

8

*Lмз* = (0*,*55 − 4*,*0) · 10 *км*

*Средняя плотность Марса*

*ρ* = 4 · 103 *кг/м*3 = 4 *г/см*3

*м*

*Ускорение свободного падения на поверхности Марса g м* = 0*,*37*g з* = 3*,*6 *м/с*

2

*Масса Луны*

*M* = 7*,*4 · 1022 *кг* = 7*,*4 · 1025 *г*

*л*

*Диаметр Луны*

*D* = 3*,*48 · 103 *км* = 3*,*48 · 106 *м*

*л*

*Среднее расстояние между Луной и Землей*

*L* = 3*,*84 · 105 *км* = 3*,*84 · 108 *м*

*л*

*Средняя плотность Луны*

*ρ* = 3*,*3 · 103 *кг/м*3 = 3*,*3 *г/см*3

*л*

*Ускорение свободного падения на поверхности Луны g л* = 1*,*64 *м/с*

2

*Т а б л и ц а* *4*

*Ускорение свободного падения на различных широтах*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *θ, град* | *g , см/с*2 | *θ, град* | *g , см/с*2 | *θ, град* | *g , см/с*2 |
| *0* | *978,0300* | *35* | *979,7299* | *70* | *982,6061* |
| *5* | *978,0692* | *40* | *980,1659* | *75* | *982,8665* |
| *10* | *978,1855* | *45* | *980,6159* | *80* | *983,0584* |
| *15* | *978,3756* | *50* | *981,0663* | *85* | *983,1759* |
| *20* | *978,6337* | *55* | *981,5034* | *90* | *983,2155* |
| *25* | *978,9521* | *60* | *981,9141* |  |  |
| *30* | *979,3213* | *65* | *982,2853* |  |  |

*Пuстuннные эJементuн при давлении 760 мм рт. ст.*

*Т а б л и ц а* *5*

*ρ - плотность (при 20* ◦*С); CP - молярная теплоемкость (при 2* ◦*С); tпл и tкип - температуры плавления и кипения; q - молярная теплота плавления; r - молярная теплота парообразования; λ - теплопроводность (значения приве- дены для температур, указанных в скобках); α - температурный коэффициент линейного расширения изотропных элементов при 0* ◦*С.*

*290*

*Таблицы*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Элемент* | *Cим- вол* | *ρ, г*  *см*3 | *C , Дж :*  *P моль*·*к* | *tпл,*◦*С* | *tкип,*◦*С* | *q,*  *кДж:*  *моль* | *r,*  *кДж:*  *моль* | *λ, Вт*  *м*·*к* | *α,*  *10*−6 *K*−1 |
| *Aлюминий* | *Al* | *2,70* | *24,3* | *660* | *2447* | *10,7* | *293,7* | *207 (27)* | *22, 8* |
| *.1арий* | *\_Нa* | *3,78* | *26,36* | *710* | *1637* | *7,66* | *1 0,9* | *-* | *19,4* |
| *.1ериллий* | *\_Не* | *1,84* | *16,44* | *1283* | *2477* | *12,* | *294* | *182 (27)* | *10,* |
| *.1ор (крист.)* | *\_Н* | *3,33* | *11,09* | *2030* | *3900* | *22,2* | *40* | *1, (27)* | *8* |
| *.1ром* | *\_Нr* | *3,12* | *7 ,71* | −7*,*3 | *8,2* | *10, 8* | *30,0* | *-* | *8,3* |
| *l:анадий* | *V* | *,96* | *24,7* | *1730* | *3380* | *17,* | *4 8* | *33,2 (20)* | *-* |
| *l:исмут* | *l:i* | *9,7* | *2 , 2* | *271,3* | *1 9* | *10,9* | *1 1,* | *8 (20)* | *16,6*2 |
| *l:ольфрам* | *w* | *18,6-19,1* | *24,8* | *3380* | *30* | *3 ,2* | *799* | *130 (27)* | *4,3* |
| *'ерманий* | *Gе* | *,46* | *28,8* | *937,2* | *2830* | *29,8* | *334* | *60,3 (0)* | *,8* |
| *Железо* | *е* | *7,87* | *2 ,02-26,74* | *1 3* | *-* | *1 ,* | *-* | *7 (0)* | *12,1* |
| *Золото* | *Au* | *19,3* | *2 ,23* | *1063* | *2700* | *12,77* | *324,4* | *310(0)* | *14,0*2 |
| *Индий* | *ln* | *7,28* | *26,7* | *1 6,01* | *207* | *3,27* | *226* | *88(20)* | *30,* 2 |
| *Йод* | *l* | *4,94* | *26,02* | *113,6* | *182,8* | *1 ,77* | *41,71* | *0,44(30)* | *93,0* |
| *Иридий* | *lr* | *22,42* | *2 ,02* | *2443* | *43 0* | *-* | *-* | *138(20)* | *6,* |
| *Kадмий* | *Сd* | *8,6* | *26,32* | *321,03* | *76* | *6,40* | *99,81* | *93(20)* | *29,0* |
| *Kалий* | *к* | *0,87* | *29,96* | *63,4* | *7 3* | *2,33* | *77,* | *100 (7)* | *84* |
| *Kальций* | *Сa* | *1,* | *26,28* | *8 0* | *1487* | *8,66* | *1 0* | *98 (0)* | *22(0)* |
| *Kобальт* | *Со* | *8,71* | *24,6* | *1492* | *22* | *1 ,3* | *383* | *70,9 (17)* | *12,0* |
| *Kремний (крист.)* | *Si* | *2,42* | *-* | *1423* | *23* | *46,* | *394,* | *167 (0)* | *2,3* |
| *lитий* | *Li* | *0, 34* | *24,6* | *180,* | *1317* | *3,01* | *148,1* | *71 (0-100)* | *-* |
| *Mагний* | *Mg* | *1,74* | *24,6* | *649* | *1120* | *8,9* | *131,8* | *16 (0)* | *-* |
| *Mарганец* | *Mn* | *7,42* | *26,32* | *1244* | *209* | *141,6* | *224,7* | *-* | *22,6* |
| *Mедь* | *Сu* | *8,93* | *24, 2* | *1083* | *2 9* | *130,1* | *304* | *39 -402 (20)* | *16,6*2 |
| *Mолибден* | *Mо* | *9,01* | *23,8* | *262* | *4800* | *27,6* | *94* | *162 (27)* | *,19* |

*Раздел V*

*291*

*Т а б л и ц а 5 (продолжение)*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Элемент* | *Cим- вол* | *ρ, г*  *см*3 | *C , Дж :*  *P моль*·*к* | *tпл,*◦*С* | *tкип,*◦*С* | *q,*  *кДж:*  *моль* | *r,*  *кДж:*  *моль* | *λ, Вт*  *м*·*к* | *α,*  *10*−6 *K*−1 |
| *Натрий* | *Na* | *0,971* | *28,12* | *97,82* | *890* | *2,602* | *89,04* | *133 (27)* | *72* |
| *Неодим* | *Nd* | *6,96* | *27,49* | *1019* | *3110* | *14,6* | *-* | *-* | *8,6* |
| *Никель* | *Ni* | *8,6-8,9* | *2 ,77* | *14 3* | *2800* | *17,8* | *380,6* | *92 (20)* | *14,0* |
| *Oлово (серое)* | *Sn* | *,8* | *2 ,77* | *231,9* | *2687* | *7,07* | *290,4* | *6 (20)* | *-* |
| *11алладий* | *1:d* | *12,16* | *2 , 2* | *1 2* | *3 60* | *17,2* | *-* | *76,2 (20)* | *12,4*2 |
| *11латина* | *1:l* | *21,37* | *2 ,69* | *1769* | *4310* | *21,7* | *447* | *74,1 (20)* | *9* |
| *\_lодий* | *Rh* | *12,44* | *2 , 2* | *1960* | *3960* | *-* | *-* | *-* | *8,7* |
| *\_lтуть (жидк.)* | *Hg* | *13, 46* | *27,98* | −38*,*86 | *3 6,73* | *2,29* | *9,11* | *8,4 (20)* | *-* |
| *\_lубидий* | *Rb* | *1, 3* | *30,88* | *38,7* | *701* | *2,20* | *69,20* | *3 , (20)* | *90* |
| *Cвинец* | *1:b* | *11,34* | *26,44* | *327,3* | *17 1* | *4,772* | *179,* | *34,89 (20)* | *28,3* |
| *Cелен (крист.)* | *Sе* | *4,* | *2 ,36* | *217,4* | *6 7* | *,42* | *-* | *0,13 (2 )* | *20,3* |
| *Cера (ромбич.)* | *S* | *2,1* | *22,60* | *11 ,18* | *444,6* | *1,718* | *90,7* | *0,2 (0)* | *74* |
| *Cеребро* | *Ag* | *10,42-10, 9* | *2 ,49* | *960,8* | *2212* | *11,27* | *2 4,0* | *418 (27)* | *19,0*2 |
| *Cтронций* | *Sr* | *2, 4* | *2 ,11* | *770* | *1367* | *9,2* | *138* | *-* | *20,6* |
| *Cурьма* | *Sb* | *6,62* | *2 ,2* | *630,* | *1637* | *20,41* | *128,2* | *23 (20)* | *9,2* |
| *Тантал* | *Ta* | *16,6* | *2 ,4* | *2996* | *400* | *31,4* | *7 ,3* | *63 (27)* | *6,2* |
| *Теллур (крист.)* | *Tе* | *6,2* | *2 ,7* | *449,* | *989,8* | *17,* | *114,06* | *-* | *17,0* |
| *Титан* | *Ti* | *4,* | *2 ,02* | *1668* | *3280* | *1 ,* | *430* | *1 , (20)* | *7,7* |
| *Торий* | *Th* | *11,1-11,3* | *27,32* | *169* | *4200* | *1 ,6* | *44* | *3 ,6 (27)* | *9,8* |
| *Углерод (алмаз)* | *С* | *3, 2* | *6,12* | *-* | *-* | *-* | *-* | *-* | *1,2* |
| *Углерод (графит)*1 | *С* | *2,2* | *8, 3* | *3 00* | *3900* | *-* | *-* | *114 (20)* | *-* |
| *Уран (13* ◦*С)* | *u* | *18,7* | *27,8* | *1133* | *3900* | *19,7* | *412* | *22, (27)* | *10,7* |
| *Фосфор (белый)* | *1:* | *1,83* | *24,69* | *44,2* | *-* | *2, 1* | *-* | *-* | *12* |
| *Хром* | *Сr* | *7,1* | *23,22* | *1903* | *2642* | *14,6* | *349* | *67 (27)* | *7,78* |
| *Цезий* | *Сs* | *1,87* | *31,4* | *28,64* | *68* | *2,18* | *6 ,9* | *23,8 (20)* | *97* |
| *Цинк* | *Zn* | *6,97* | *2 ,40* | *419,* | *907* | *7,28* | *114,7* | *111 (20)* | *32* |
| *Цирконий* | *Zr* | *6,44* | *2 ,1* | *18* | *4380* | *20* | *82* | *21,4 (20)* | *,1* |

1 *\_lеакторный графит, ρ* = 1*,*65 − 1*,*72 *г/см*3*; приведено значение λ*⊥ *поперек направления прессования, λ*⊥*/λ* = 1*,*5*.*

2 *11ри 20* ◦*С.*

*292 Таблицы*

*Т а б л и ц а* *6*

*Пuстuннные тнер,цых теJ (при 20* ◦*C)*

*ρ - плотность, α - температурный коэффициент линейного расши- рения, λ - теплопроводность.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *ρ, г/см*3 | *α, 10*−6 *К*−1 | *λ, Вт/(м*·*К)* |
| *Сплавы* |  |  |  |
| *Бронзы (Сu, Zn, Sn, Al)* | *8,738,9* | *16320* | *200* |
| *Дюралюминий (Al, Сu)* | *2,8* | *27* | *186* |
| *Инвар (Fе, Ni, С)*  *Константан (Сu, Ni)* | *8,0*  *8,8* | ∼*1*  *15317* | *11*  *21322* |
| *Латунь (Сu, Zn)* | *8,438,7* | *17320* | *803180* |
| *Манганин (Сu, Mn, Ni)* | *8,5* | *16* | *-* |
| *Платино-иридиевый*  *сплав (Pl, II')* | *21322* | *8,7* | *-* |
| *Стали* | *7,537,9* | *10313* | ∼*40* |
| *Дерево (сухое)*1 |  |  |  |
| *Бальза (пробковое)* | *0,1130,14* | *-* | *0,04* |
| *Бамбук* | *0,3130,40* | *-* | *0,1430,17* |
| *Бук* | *0,730,9* | *2,57* | *-* |
| *Береза* | *0,530,7* | *-* | *0,117* |
| *Дуб* | *0,630,9* | *4,92* | *0,171* |
| *Кедр* | *0,4930,57* | *-* | *0,0830,09* |
| *Клен* | *0,6230,75* | *6,38* | *0,1230,13* |
| *Сосна* | *0,3730,60* | *5,41* | *0,0830,11* |
| *Тополь* | *0,3530,5* | *-* | *0,1* |
| *Ясень* | *0,6530,85* | *9,51* | *0,1230,14* |
| *Минералы* |  |  |  |
| *Алмаз* | *3,0133,52* | *1,5* | *628* |
| *Асбест* | *2,032,8* | *-* | *0,1* |
| *Базальт* | *2,433,1* | *-* | *2,177* |
| *Гипс* | *132,3* | *-* | *0,1831,05* |
| *Глина* | *1,832,6* | *8,1* | *1,0531,26* |
| *Гранит* | *2,3432,76* | *8,3* | *2,733,3* |
| *Кварц (плав.)* | *2,65* | *1,46* | *-* |
| *Мел* | *1,932,8* | *-* | *1,1* |
| *Мрамор* | *2,632,84* | *3315* | *2,733* |
| *Слюда* | *2,633,2* | *-* | *-* |

1 *Коэффициенты теплопроводности древесины приведены для направлений, перпендикулярных волокнам, теплопроводность вдоль волокон в 233 раза выше.*

*Т а б л и ц а 6 (продолжение)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *ρ, г/см*3 | *α, 10*−6 *К*−1 | *λ, Вт/(м*·*К)* |
| *Другие вещества*  *Картон Кирпич Лед Парафин Плексиглас Пробка Резина*  *Стекло обыкн. Стекло флинт Фарфор Эбонит*  *Янтарь* | *0,69*  *1,432,2*  *0,913*  *0,8730,91*  *1,1631,20*  *0,2230,26*  *1,1*  *2,432,8*  *3,935,9*  *2,332,5*  *1,15*  *1,1* | *-*  *3-9*  *-*  *- 923130*  *-*  *220*  *6*  *738*  *2,536*  *84,2*  *57* | *0,21*  *131,3*  *-*  *2,5*  *0,1730,18*  *- 0,146*  *0,731,13*  *0,84*  *1,05*  *0,17*  *-* |

*Т а б л и ц а* *7*

*Пuстuннные 2Ки,цкuстей (при давлении 760 мм рт. ст.)*

*σ - коэффициент поверхностного натяжения при указанной в сосед- нем столбце температуре (в - на границе с воздухом, п - на границе с парами этой же жидкости), η - вязкость при 20* ◦*С, λ - теплопро-*

*водность при 0* ◦*С.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *t,* ◦*С* | *σ, 10*−3    *м* | *η, 10*−3 *кг*    *м*·*с* | *λ, Вт*  *м*·*к* |
| *Анилин* | *19,5* | *40,8 (п)* | *4,40* | *0,181* |
| *Ацетон* | *16,8* | *23,3 (п)* | *0,324* | *0,170* |
| *Бензол* | *17,5* | *29,2 (в)* | *0,647* | *0,153* |
| *Вода* | *20* | *72,75 (в)* | *1,0019* | *0,596* |
| *Глицерин* | *20* | *63,4 (в)* | *1495,0* | *0,290* |
| *Дихлорэтан* |  | *-* | *-* | *0,146* |
| *Кислота азотная 70%* | *20* | *59,4 (в)* | *-* | *-* |
| *Кислота серная 85%* | *18* | *57,6 (в)* | *27* | *-* |
| *Масло касторовое* | *18* | *33,1 (в)* | *986* | *-* |
| *Нитробензол* | *13,6* | *42,7 (п)* | *2,01* | *0,166* |
| *Олово* | *232* | *526,1 (С* 2 *)* | *-* | *34,3* |
| *Ртуть* | *20* | *487 (п)* | *1,552* | *8,45* |
| *Скипидар* | *20* | *26,7 (в)* | *-* | *-* |
| *Спирт метиловый* | *20* | *23,0 (п)* | *0,578* | *0,222* |
| *Спирт этиловый* | *20* | *22,75 (п)* | *1,200* | *0,184* |
| *Углерод четыреххлористый* | *20* | *27 (п)* | *0,972* | *0,112* |
| *Эфир этиловый* | *20* | *16,96 (п)* | *0,242* | *-* |

*Т а б л и ц а* *8*

*294*

*Таблицы*

*Постоянные �идкостей*

*ρ - плотность при 20* ◦*С, tпл и tкип - температуры плавления и кипения при нормальном давлении, tкр - критическая температура, Pкр - критическое давление, c - удельная теплоемкость при 20* ◦*С, q и r - удельная теплота плавления и парообразования, β - температурный коэффициент объемного расширения при 20* ◦*С.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *Формула* | *ρ, кг м*3 | *tпл,*   * *С* | *tкип,*   * *С* | *tкр,*   * *С* | *Pкр, атм* | *c,*  *Дж:*  *г*·*к* | *q,*  *Дж:*  *г* | *r,*  *Дж:*  *г* | *β,*  10−5 *к*−1 |
| *Анилин* | *С*6 *H*7*N* | *1026*1 | −6  −95  *+5,5*  *0,0*  *+20*  −93*,*9  *+5,9*  −111  −117  −95*,*0  −23  *+16,7*  *+40,1*  −63*,*5  −116 | *184* | *426* | *52,4* | *2,156* | *87,5* | *458,9* | *85* |
| *Ацетон* | *С*3 *H*6 | *792* | *56,5* | *235* | *47,0* | *2,18* | *82,0* | *521,2* | *143* |
| *Бензол* | *С*6 *H*6 | *897* | *80,1* | *290,5* | *50,1* | *1,72* | *126* | *394,4* | *122* |
| *Вода* | *H*2 | *998,2* | *100,00* | *374* | *218* | *4,14* | *334* | *2259* | *18* |
| *Глицерин* | *С*3 *H*83 | *1260* | *290* | *-* | *-* | *2,43* | *176* | *-* | *51* |
| *Метиловый спирт* | *СH*4 | *792,8* | *61,1* | *240* | *78,7* | *2,39* | *68,7* | *1102* | *119* |
| *Нитробензол* | *С*6 *H*52*N* | *1173,2*2 | *210,9* | *-* | *-* | *1,419* | *-* | *-* | *-* |
| *Сероуглерод* | *СS*2 | *1293* | *46,3* | *275,0* | *77,0* | *1,00* | *-* | *356* | *-* |
| *Спирт этиловый* | *С*2 *H*6 | *789,3* | *78,5* | *243,5* | *63,1* | *2,51* | *108* | *855* | *112* |
| *Толуол* | *С*7 *H*8 | *867* | *110,6* | *320,6* | *41,6* | *1,616*3 | *-* | *364* | *114* |
| *Углерод четыреххлористый* | *ССl*4 | *1595* | *76,7* | *283,1* | *45,0* | *-* | *16,2* | *195,1* | *122* |
| *Уксусная кислота* | *С*2 *H*42 | *1049* | *118* | *321,6* | *57,2* | *2,6*4 | *187* | *405,3* | *107* |
| *Фенол* | *С*6 *H*6 | *1073* | *181,7* | *419* | *60,5* | *-* | *123* | *495,3* | *-* |
| *Хлороформ* | *СHСl*3 | *1498,5*1 | *61* | *260* | *54,9* | *0,96* | *197* | *243* | *-* |
| *Эфир этиловый* | *С*4 *H*10 | *714* | *34,5* | *193,8* | *35,5* | *2,34* | *98,4* | *355* | *163* |

1 *при 15* ◦*С,* 2 *при 25* ◦*С,* 3 *при 0* ◦*С,* 4 *при 138* ◦*С.*

*Т а б л и ц а* *9*

## *Скuрuсть знука н разJичных сре,цах*

*Газы (при 0* ◦*C)*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *c, м/с* | *dc/dt,*  *м*  *с*·*к* | *Вещество* | *c, м/с* | *dc/dt,*  *м*  *с*·*к* |
| *Азот* | *333,64* | *0,85* | *Кислород Метан Неон Пары воды*  *(100* ◦*С)*  *Углекислый газ* | *314,84* | *0,57* |
| *Аммиак* | *415,0* | *0,73* | *430* | *0,62* |
| *Аргон* | *319,0* | *-* | *435* | *0,78* |
| *Водород* | *1286,0* | *2,0* | *405* | *-* |
| *Воздух* | *331,46* | *0,607* |  |  |
| *(сухой)* |  |  |  |  |
| *Гелий* | *970* | *1,55* | *260,3* | *0,87* |

*Жидкости*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *t,*   * *С* | *c,*  *м/с* | *dc/dt,*  *м*  *с*·*к* | *Вещество* | *t,*   * *С* | *c,*  *м/с* | *dc/dt,*  *м*  *с*·*к* |
| *Азот* | −199*,*0 | *962* | −10 | *Сероуглерод Скипидар Спирт*  *этиловый*  *Толуол Углерод четырех-*  *хлористый* | *25* | *1149* | −3*,*3 |
| *Анилин* | *20* | *1659* | −4*,*0 | *25* | *1225* | *-* |
| *Ацетон* | *25* | *1170* | −5*,*5 | *20* | *1177* | −3*,*6 |
| *Бензол* | *25* | *1295* | −5*,*2 |  |  |  |
| *Вода* | *25* | *1497* | +2*,*5 | *25* | *1300* | −4*,*3 |
| *Глицерин* | *26* | *1930* | −1*,*8 |  |  |  |
| *Керосин* | *25* | *1315* | −3*,*6 | *25* | *930* | −3*,*0 |
| *Ртуть* | *20* | *1451* | −0*,*46 |  |  |  |

*Твердые тела*

*c - скорость продольных волн, c - скорость поперечных волн, c - скорость продольных волн в тонком стержне.*

⊥

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *c**, м/с* | *c*⊥*, м/с* | *c, м/с* |
| *Алюминий* | *6400* | *3130* | *5240* |
| *Бетон* | *425035250* | *-* | *-* |
| *Вольфрам* | *5174* | *2842* | *-* |
| *Гранит* | *5400* | *-* | *-* |
| *Дерево (дуб, вдоль волокна)* | *-* | *-* | *4100* |
| *Дерево (сосна, вдоль волокна)* | *-* | *-* | *3600* |
| *Дюралюминий* | *6400* | *3120* | *-* |
| *Железо* | *5930* | *-* | *5170* |
| *Кварц кристал. (X-срез)* | *5720* | *-* | *5440* |
| *Кварц плавленый* | *5980* | *3760* | *5760* |
| *Латунь* | *428034700* | *202032110* | *313033450* |
| *Медь (отожженная)* | *4720* | *-* | *3790* |
| *Мрамор* | *-* | *-* | *3810* |
| *Никель (отожженный, ненамагниченный)* | *-* | *-* | *4810* |
| *Олово* | *3320* | *-* | *2730* |
| *Полистирол* | *2350* | *1120* | *-* |
| *Полиэтилен* | *2000* | *-* | *-* |
| *Серебро* | *3700* | *1694* | *2802* |
| *Стекло: крон* | *526036120* | *305033550* | *471035300* |
| *флинт* | *376034800* | *-* | *349034550* |
| *Сталь инструментальная* | *590036100* | *-* | *5150* |
| *Сталь нержавеющая* | *5740* | *3092* | *-* |
| *Цинк* | *4170* | *-* | *3810* |
| *Эбонит* | *2500* | *-* | *-* |

*Т а б л и ц а* *10*

*Унру'ие снuйстна материаJuн (при 18* ◦*C)*

*E и G - модули Юнга и сдвига, µ - коэффициент Пуассона, K - модуль всестороннего сжатия.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Материал* | *E,* 1010  *м*2 | *G,* 1010  *м*2 | *µ* | *K,* 1010  *м*2 |
| *Металлы* |  |  |  |  |
| *Алюминий* | *7,05* | *2,63* | *0,345* | *7,58* |
| *Бронза (66% Сu)* | *9,7310,2* | *3,333,7* | *0,3430,40* | *11,2* |
| *Висмут* | *3,19* | *1,20* | *0,33* | *3,13* |
| *Железо* | *19320* | *7,738,3* | *0,29* | *16,9* |
| *Золото* | *7,8* | *2,7* | *0,44* | *21,7* |
| *Кадмий* | *4,9* | *1,92* | *0,30* | *4,16* |
| *Константан* | *16,3* | *6,11* | *0,32* | *15,5* |
| *Латунь* | *9,7310,2* | *3,5* | *0,3430,40* | *10,65* |
| *Медь* | *10,5313,0* | *3,534,9* | *0,34* | *13,76* |
| *Никель* | *20,4* | *7,9* | *0,28* | *16,1* |
| *Олово* | *5,43* | *2,04* | *0,33* | *5,29* |
| *Платина* | *16,8* | *6,1* | *0,37* | *22,8* |
| *Свинец* | *1,62* | *0,56* | *0,44* | *4,6* |
| *Серебро* | *8,27* | *3,03* | *0,37* | *10,4* |
| *Сталь* | *20321* | *7,938,9* | *0,2530,33* | *16,8* |
| *Титан* | *11,6* | *4,38* | *0,32* | *10,7* |
| *Цинк* | *9,0* | *3,6* | *0,25* | *6,0* |
| *Другие материалы* |  |  |  |  |
| *Бамбук* | *3,3* | *-* | *-* | *-* |
| *Дуб* | *1,3* | *-* | *-* | *-* |
| *Кварцевые нити* | *7,3* | *-* | *-* | *-* |
| *Красное дерево* | *0,88* | *-* | *-* | *-* |
| *Резина мягкая* | *0,000153* | *0,000053* | *0,4630,49* | *16,8* |
|  | *0,0005* | *0,00015* |  |  |
| *Сосна* | *0,9* | *-* | *-* | *-* |
| *Стекло* | *5,137,1* | *3,1* | *0,1730,32* | *3,75* |

*Т а б л и ц а* *11*

## *Кuэффициенты нuнерхнuстнu'u* натн2Кенин нu,цы и аниJина нри разJичных темнературах

*Границы: вода - воздух, анилин - воздух.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *t*   * *С* | *σ, 10*−3 *Н/м* | | *t*   * *С* | *σ, 10*−3 *Н/м* |
| *Вода* | *Анилин* | *Вода* |
| *0* | *75,64* | *-* | *60* | *66,18* |
| *10* | *74,22* | *44,10* | *70* | *64,42* |
| *20* | *72,75* | *42,7* | *80* | *62,61* |
| *30* | *71,18* | *-* | *90* | *60,75* |
| *40* | *69,56* | *-* | *100* | *58,85* |
| *50* | *67,91* | *39,4* |  |  |

*Т а б л и ц а* *12*

*Внзкuсть 2Ки,цкuстей нри разJичных темнературах (η,* 10−3 *Н* · *с/м*2*)*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,*   * *С* | *Вода* | *Глице- рин* | *Раствор сахара*  *водный* | | *t,*   * *С* | *Касто-*  *ровое*  *масло* | *t,*   * *С* | *Ртуть* |
| *20%* | *60%* |
| *0*  *10* | *1,788*  *1,306* | *12100*  *3950* | *3,804*  *2,652* | *238*  *109,8* | *5*  *10* | *3760*  *2418* | −20  *0* | *1,86*  *1,69* |
| *15* | *1,140* | *-* | *2,267* | *74,6* | *15* | *1514* | *20* | *1,55* |
| *20* | *1,004* | *1480* | *1,960* | *56,5* | *20* | *950* | *30* | *1,50* |
| *25* | *0,894* | *-* | *1,704* | *43,86* | *25* | *621* | *50* | *1,41* |
| *30* | *0,801* | *600* | *1,504* | *33,78* | *30* | *451* | *100* | *1,24* |
| *40* | *0,653* | *330* | *1,193* | *21,28* | *35* | *312* | *200* | *1,05* |
| *50* | *0,549* | *180* | *0,970* | *14,01* | *40* | *231* | *300* | *0,95* |
| *60* | *0,470* | *102* | *0,808* | *9,83* | *100* | *16,9* |  |  |
| *70* | *0,406* | *59* | *0,685* | *7,15* |  |  |  |  |
| *80* | *0,356* | *35* | *0,590* | *5,40* |  |  |  |  |
| *90* | *0,316* | *21* |  |  |  |  |  |  |
| *100* | *0,283* | *13* |  |  |  |  |  |  |

*Т а б л и ц а* *13*

*Внзкuсть нu,цнu'u растнuра 'Jицерина (указан весовой процент глицерина)*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | *10%* | *25%* | *50%* | *80%* | *95%* | *96%* | *97%* | *98%* | *99%* | *100%* |
| *20* | *1,31* | *2,09* | *6,03* | *61,8* | *544* | *659* | *802* | *971* | *1194* | *1495* |
| *25* | *1,15* | *1,81* | *5,02* | *45,7* | *365* | *434* | *522* | *627* | *772* | *942* |
| *30* | *1,02* | *1,59* | *4,23* | *34,8* | *248* | *296* | *353* | *423* | *510* | *662* |

*Т а б л и ц а* *14*

## *С2Кимаемuсть некuтuрых 2Ки,цкuстей*

κ = − 1 ( *∂V* )

*V*

*∂P*

*T*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *Формула* | *Давление*  *P, атм* | *t,* ◦*C* | κ*,*  10−6 *атм*−1 |
| *Анилин* | *C*6*H*5*NH*2 | *85,5* | *25* | *43,2* |
| *Ацетон* | *(CH*3*)*2*C* | *0-500* | *0* | *82* |
| *Бензол* | *C*6*H*6 | *1-4* | *15,4* | *87* |
| *Вода* | *H*2 | *0-100* | *20* | *46,8* |
| *Глицерин* | *C*3*H*83 | *1-10* | *14,8* | *22,1* |
| *Керосин* | *-* | *1-100* | *16,5* | *69,6* |
| *Кислота серная* | *H*2*S* 4 | *1-16* | *0* | *302,5* |
| *Нитробензол* | *C*6*H*5*N* 2 | *86,5* | *25* | *46,1* |
| *Сероуглерод* | *CS*2 | *1-2* | *20* | *80,95* |
| *Спирт метиловый* | *CH*3 *H* | *1-500* | *0* | *79,4* |
| *Спирт этиловый* | *CH*3*CH*2 *H* | *1-50* | *0* | *96* |
| *Углерод*  *четыреххлористый* | *CC* 4 | *0-98,7* | *20* | *91,6* |
| *Углерода двуокись* | *СО*2 | *60* | *13* | *1740* |
| *Хлороформ* | *CHC* 3 | *1-2* | *0* | *87,27* |
| *Этил бромистый* | *C*2*H*5*Br* | *1-500* | *10,1* | *80* |

*Т а б л и ц а* *15*

## *У,цеJьнан тенJuемкuсть нu,цы и скuрuсть знука н нu,це* нри разJичных темнературах

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,* ◦*C* | *c, Дж/(г*·*К)* | *v, м/с* | *t,* ◦*C* | *c, Дж/(г*·*К)* | *v, м/с* |
| *0* | *4,2174* | *1407* | *60* | *4,1841* | *1556* |
| *10* | *4,1919* | *1445* | *70* | *4,1893* | *1561* |
| *20* | *4,1816* | *1484* | *80* | *4,1961* | *1557* |
| *30* | *4,1782* | *1510* | *90* | *4,2048* |  |
| *40* | *4,1783* | *1528* | *99* | *4,2145* |  |
| *50* | *4,1804* | *1544* |  |  |  |

*Т а б л и ц а* *16*

## *Темнература киненин нu,цы нри разJичных ,цанJенинх*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P, торр* | *t,* ◦*C* | *P, торр* | *t,* ◦*C* | *P, торр* | *t,* ◦*C* |
| *680* | *96,9138* | *725* | *96,6846* | *770* | *100,3666* |
| *685* | *96,1153* | *730* | *98,8757* | *775* | *100,5484* |
| *690* | *97,3156* | *735* | *99,0657* | *780* | *100,7293* |
| *695* | *97,5146* | *740* | *99,2547* | *785* | *100,9092* |
| *700* | *97,7125* | *745* | *99,4426* | *790* | *101,0881* |
| *705* | *97,9092* | *750* | *99,6294* | *795* | *101,2661* |
| *710* | *98,1048* | *755* | *99,8152* | *799* | *101,4079* |
| *715* | *98,2992* | *760* | *100,000* |  |  |
| *720* | *98,4925* | *765* | *100,1838* |  |  |

*Т а б л и ц а* *17*

## *ПJuтнuсть нu,цы нри разJичных темнературах*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,* ◦*C* | *ρ, г/см*3 | *t,* ◦*C* | *ρ, г/см*3 | *t,* ◦*C* | *ρ, г/см*3 |
| *0* | *0,99987* | *12* | *0,99952* | *24* | *0,99732* |
| *1* | *0,99993* | *13* | *0,99940* | *25* | *0,99707* |
| *2* | *0,99997* | *14* | *0,99927* | *26* | *0,99681* |
| *3* | *0,99999* | *15* | *0,99913* | *27* | *0,99654* |
| *4* | *1,00000* | *16* | *0,99897* | *28* | *0,99626* |
| *5* | *0,99999* | *17* | *0,99880* | *29* | *0,99597* |
| *6* | *0,99997* | *18* | *0,99862* | *30* | *0,99567* |
| *7* | *0,99993* | *19* | *0,99843* | *31* | *0,99537* |
| *8* | *0,99988* | *20* | *0,99823* | *32* | *0,99505* |
| *9* | *0,99981* | *21* | *0,99802* | *33* | *0,99472* |
| *10* | *0,99973* | *22* | *0,99780* | *34* | *0,99440* |
| *11* | *0,99963* | *23* | *0,99757* | *35* | *0,99406* |

*Т а б л и ц а* *18*

## *Кuэффициенты ,циффузии растнuрuн* нuнареннuй сuJи н нu,це (при 18 ◦*C)*

|  |  |
| --- | --- |
| *Концентрация NaC , моль/л* | *D, 10*−5 *см*2*/с* |
| *0,05* | *1,26* |
| *0,40* | *1,2* |
| *1,00* | *1,24* |
| *2,0* | *1,29* |
| *3,0* | *1,36* |
| *4,0* | *1,43* |
| *5,0* | *1,49* |

*Т а б л и ц а* *19*

## *Кuэффициенты ,циффузии растнuрuн* неuр'анических нещестн н нu,це

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Растворенное вещество* | *Концентрация, моль/л* | *t,* ◦*C* | *D,*  10−5 *см*2*/с* |
| *Br*2 | *0,0050* | *25* | *1,18* |
| *C* 2 | *0*1 | *18* | *1,46* |
| *CaC* 2 | *1,5* | *9* | *0,84* |
| *CdS* 4 | *1,0* | *16,8* | *0,33* |
| *C* 2 | *0,1* | *16,3* | *1,3* |
| *CоC* 2 | *0,0127* | *11* | *0,73* |
| *C C* 2 | *1,5* | *10* | *0,5* |
| *C S* 4 | *0,1* | *17* | *0,45* |
| *H*2 | *0*1 | *18* | *3,6* |
| *HC* | *0,2* | *25* | *3,0* |
| *HN* 3 | *3,0* | *6* | *1,8* |
| *KBr* | *1,0* | *10* | *1,2* |
| *KC* | *0,1* | *25* | *1,89* |
| *KN* 3 | *0,2* | *18* | *1,39* |
| *K H* | *0,1* | *13,5* | *2,0* |
| *K*2*S* 4 | *0,02* | *19,6* | *1,27* |
| *LiC* | *1,0* | *18* | *1,06* |
| *мgS* 2 | *1,0* | *15,5* | *0,53* |
| *N*2 | *0*1 | *18* | *1,63* |
| *NH*3 | *0,683* | *4* | *1,23* |
| *NaBr* | *2,9* | *10* | *1,0* |
| *Na*2*C* 3 | *2,4* | *10* | *0,45* |
| *NaC* | *1,0* | *18,5* | *1,24* |
| *NaN* 3 | *0,6* | *13* | *1,04* |
| 2 | *0*1 | *25* | *2,60* |
| *Na H* | *0,1* | *12* | *1,29* |

1 *Сильно разбавленный раствор.*

*Т а б л и ц а* *20*

## *Кuэффициенты ,циффузии 'азuн*

*Ко ффичиенты са.модиффузии (при t* = 0 ◦*C, P* = 1 *атм)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Газ* | *D, см*2*/с* | *Газ* | *D, см*2*/с* |
| *Азот N*2 | *0,17* | *Ксенон Хe* | *0,048* |
| *Аргон Аr* | *0,156* | *Криптон Kr* | *0,08* |
| *Водород H*2 | *1,28* | *Метан CH*4 | *0,206* |
| *Водяной пар* | *0,277* | *Неон Ne* | *1,62* |
| *Гелий He* | *1,62* | *Углерода окись C* | *0,175* |
| *Кислород* 2 | *0,18* | *Углекислый газ C* 2 | *0,097* |

*Ко ффичиенты взаи.мной диффузии (при t* = 0 ◦*C)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Система* | *D, см*2*/с* | *Система* | *D, см*2*/с* |
| *He - CH*4 | *0,57* | *H*2 *- воздух* | *0,66* |
| *He -* 2 | *0,45* | *H*2 *- CH*4 | *0,62* |
| *He - воздух* | *0,62* | *H*2 *-* 2 | *0,69* |
| *Ne - H*2 | *0,99* | *CH*4 *- N*2 | *0,2* |
| *Ne - N*2 | *0,28* | *CH*4 *-* 2 | *0,22* |
| *Аr - CH*4 | *0,172* | *CH*4 *- воздух* | *0,186* |
| *Аr -* 2 | *0,167* | *N*2 *- H*2 | *0,204* |
| *Аr - воздух* | *0,165* | *N*2 *- C* 2 | *0,208* |
| *Аr - C* 2 | *0,177* | *C -* 2 | *0,175* |
| *Kr - N*2 | *0,13* | *C - воздух* | *0,182* |
| *Kr - C* | *0,13* | 2 *- C* 2 | *0,174* |
| *Хe - H*2 | *0,54* | *воздух - C* 2 | *0,207* |
| *Хe - N*2 | *0,106* | *H*2 *- C* 2 | *0,41* |

*Т а б л и ц а* *21*

*ТенJuнрuнu,цнuсть нuз,цуха нри разJичных темнературах (при P* = 1 *атм)*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,* ◦*C* | *λ,* 10−2  *Вт*  *м*·*к* | *t,* ◦*C* | *λ,* 10−2  *Вт*  *м*·*к* | *t,* ◦*C* | *λ,* 10−2  *Вт*  *м*·*к* |
| −173  −143  −113  −83  −53 | *0,922*  *1,204*  *1,404*  *1,741*  *1,983* | −23  −3  *0,1*  *7*  *17* | *2,207*  *2,348*  *2,370*  *2,417*  *2,485* | *27*  *37*  *67*  *97* | *2,553*  *2,621*  *2,836*  *3,026* |

*Т а б л и ц а* *22*

*Кuэффициенты Д2КuуJн-Тuмсuна (µД*−*Т* = ∆*T/*∆*P, в единицах К/атм)*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,* ◦*C* | *Окись углерода (C )* | | | |
| *P, атм* | | | |
| *1* | *50* | *100* | *200* |
| *0* | *0,295* | *0,240* | *0,190* | *0,093* |
| *25* | *0,251* | *0,206* | *0,162* | *0,084* |
| *50* | *0,213* | *0,175* | *0,137* | *0,072* |
| *100* | *0,150* | *0,122* | *0,095* | *0,049* |
| *T , К* | *Водород (H*2*)* | | | |
| *P, атм* | | | |
| ≈ 0 | *20* | *100* | *180* |
| *60* | *0,391* | *0,287* | *0,035* | *-* |
| *70*  *80* | *0,287*  *0,220* | *0,234*  *0,192* | *0,059*  *0,061* | −0*,*039  −0*,*037 |
| *t* ◦*C* | *Метан (CH*4*)* | | | |
| *P, атм* | | | |
| ≈ 0 | *17* | *51* | *102,1* |
| *21,1* | *0,405* | *0,425* | *0,410* | *0,332* |
| *37,8* | *0,359* | *0,375* | *0,365* | *0,294* |
| *71,1* | *0,283* | *0,298* | *0,290* | *0,229* |
| *104,4* | *0,227* | *0,239* | *0,233* | *0,180* |
| *t* ◦*C* | *Этан (C*2*H*8*)* | | | |
| *P, атм* | | | |
| ≈ 0 | *17* | *51* | *102,1* |
| *21,1* | *0,939* | *1,217* | *-* | *-* |
| *37,8* | *0,833* | *1,037* | *-* | *-* |
| *71,1* | *0,657* | *0,760* | *0,890* | *0,353* |
| *104,4* | *0,498* | *0,572* | *0,586* | *0,399* |

*Т а б л и ц а 22 (продолжение)*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,* ◦*С* | *Аргон (AI')* | | | | *Гелий (Hе)* |
| *P, атм* | | | | *P, атм* |
| *1* | *20* | *100* | *200* | *200* |
| −*150*  −*100*  *0*  *25* | *1,81*  *0,860*  *0,431*  *0,371* | *-*  *0,800*  *0,406*  *0,350* | −*0,025*  *0,285*  *0,305*  *0,264* | −*0,056*  *0,040*  *0,192*  *0,175* | −0*,*052  −0*,*058  −0*,*0616  *-* |
| *100*  *200* | *0,242*  *0,137* | *0,224*  *0,126* | *0,175*  *0,095* | *0,127*  *0,068* | −0*,*0638  −0*,*0641 |
|  | *Азот (N*2*), кислород (* 2*)* | | | |  |
| *t,* ◦*С* | *P, атм* | | | |
|  | *1* | *20* | *100* | *200* |
| −*150*  −*100*  *0* | *1,265*  *0,649*  *0,267* | *1,128*  *0,594*  *0,250* | *0,020*  *0,274*  *0,169* | −*0,027*  *0,058*  *0,087* |
| *25* | *0,222* | *0,206* | *0,140* | *0,078* |
| *100* | *0,129* | *0,119* | *0,077* | *0,042* |
| *200* | *0,056* | *0,048* | *0,026* | *0,006* |
|  | *Углекислый газ (С* 2*)* | | | |
| *t,* ◦*С* | *P, атм* | | | |
|  | *1* | *20* | *100* | *200* |
| −*25*  *0* | *1,650*  *1,290* | *0,000*  *1,402* | −*0,005*  *0,022* | −*0,012*  *0,005* |
| *20* | *1,105* | *1,136* | *0,070* | *0,027* |
| *40* | *0,958* | *0,966* | *0,262* | *0,066* |
| *60* | *0,838* | *0,833* | *0,625* | *0,125* |
| *80* | *0,735* | *0,724* | *0,597* | *0,196* |
| *100* | *0,649* | *0,638* | *0,541* | *0,256* |
| *200* | *0,373* | *0,358* | *0,315* | *0,246* |
|  | *Воздух* | | | |
| *t,* ◦*С* | *P, атм* | | | |
|  | *1* | *20* | *100* | *200* |
| −*100*  −*50*  −*25*  *0* | *0,5895*  *0,3910*  *0,3225*  *0,2746*  *0,2320*  *0,1956*  *0,1614*  *0,1355* | *0,5700*  *0,3690*  *0,3010*  *0,2577* | *0,2775*  *0,2505*  *0,2130*  *0,1446* | *0,0655*  *0,1270*  *0,1240*  *0,1097* |
| *25* | *0,2173* | *0,1550* | *0,0959* |
| *50* | *0,1830* | *0,1310* | *0,0829* |
| *75* | *0,1508* | *0,1087* | *0,0707* |
| *100* | *0,1258* | *0,0884* | *0,0580* |

*Т а б л и ц а* *23*

## *Критические нараметры и кuэффициенты a и b*

*н ураннении сuстuннин Ван ,цер ВааJьса*

(*P* + *a* ) (*V* − *b*) = *RT , a* = 27 *RT*

*V* 2

8

*кр*

8*Pкр*

*b, b* = *RTкр*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *Tкр*  *К* | *Pкр*  *МПа* | *ρкр*  *г см*3 | *a*  ·*м*4  *моль*2 | *b*  *см*3  *моль* |
| *Азот (N*2*)* | *126,25* | *3,399* | *0,304* | *0,1368* | *38,607* |
| *Аргон (AI')* | *150,65* | *4,86* | *0,531* | *0,1361* | *32,191* |
| *Вода (пары) (H*2 *)* | *647,30* | *22,12* | *0,32* | *0,5524* | *30,413* |
| *Водород (H*2*)* | *33,24* | *1,297* | *0,0310* | *0,02484* | *26,635* |
| *Воздух* | *132,45* | *3,77* | *0,35* | *0,1357* | *36,51* |
| *Гелий (Hе)* | *5,20* | *0,229* | *0,0693* | *0,00344* | *23,599* |
| *Закись азота (N*2 *)* | *309,58* | *7,255* | *0,453* | *0,3852* | *44,347* |
| *Кислород (* 2*)* | *154,78* | *5,081* | *0,41* | *0,1375* | *31,662* |
| *Неон (Nе)* | *44,45* | *2,72* | *0,484* | *0,0211* | *16,948* |
| *Окись азота (N )* | *180* | *6,54* | *0,52* | *0,1444* | *28,579* |
| *Окись углерода (С )* | *132,92* | *3,499* | *0,301* | *0,1473* | *39,482* |
| *Метан (СH*4*)* | *190,60* | *4,63* | *0,160* | *0,2288* | *42,777* |
| *Метиловый*  *спирт (СH*4 *)* | *513,15* | *7,95* | *0,272* | *0,9654* | *67,047* |
| *Спирт этиловый*  *(С*2 *H*6 *)* | *516* | *6,4* | *0,276* | *1,2164* | *84,006* |
| *Сероуглерод (СS*2*)* | *552* | *7,90* | *0,44* | *1,1243* | *72,585* |
| *Углекислый газ (С* 2*)* | *304,15* | *7,387* | *0,468* | *0,3652* | *42,792* |
| *Хлор (Сl*2 *)* | *417* | *7,71* | *0,573* | *0,6576* | *56,202* |
| *Четыреххлористый*  *углерод (ССl*4 *)* | *556,25* | *4,56* | *0,558* | *1,9789* | *126,78* |
| *Этан (С*2 *H*6*)* | *305,45* | *4,87* | *0,203* | *0,5571* | *64,997* |

*Т а б л и ц а* *24*

## *Занисимuсть нараметрuн a и b ,цJн ар'uна* uт темнературы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Температура,* ◦*С* | *a, 10*6 *атм*·*см*6*/моль*2 | *b, см*3*/моль* |
| *151* | *1,90* | *61* |
| *157* | *1,87* | *59,5* |
| *163* | *1,84* | *58* |
| *173* | *1,785* | *55,5* |
| *183* | *1,735* | *53* |
| *193* | *1,69* | *51* |
| *213* | *1,60* | *48* |
| *233* | *1,53* | *45* |
| *253* | *1,47* | *43* |
| *273* | *1,42* | *41* |

*Пuстuннные 'азuн*

*Т а б л и ц а* *25*

*M - молекулярная масса, ρ - плотность (при t* = 0 ◦*С, P* = 1 *атм), tкр - критическая температура,*

*306*

*Таблицы*

*Pкр - критическое давление, ρкр - критическая плотность, tпл - температура плавления (при P* =

= 1 *атм), tкип - температура кипения (при P* = 1 *атм).*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *Формула* | *M* | *ρ, кг/м*3 | *tкр,* ◦*С* | *Pкр, атм* | *ρ , кг/м*3 *кр* | *tпл,* ◦*С* | *tкип,* ◦*С* |
| *Азот* | *N*2 | *28,016* | *1,2505* | *147,1* | *33,5* | *311* | −210*,*0*2*  −77*,*7  −189*,*3  −259*,*2*0*  *0,00*  −213  −272*,*2  −90  −218*,*83  −182*,*5  −248*,*6*0*  −167  −205  2  −56*,*6  −100*,*5 | −195*,*81  −33*,*4  −185*,*9  −252*,*78  *100,00*  −193  −268*,*93  −88*,*6  −182*,*97  −116*,*7  −246*,*1  −150  −191*,*5  3  −78*,*48  −33*,*95 |
| *Аммиак* | *NH*3 | *17,031* | *0,7714* | *132,4* | *112,0* | *234* |
| *Аргон* | *AI'* | *39,944* | *1,7839* | *122,4* | *48,0* | *531* |
| *Водород* | *H*2 | *2,0158* | *0,08988* | *239,9* | *12,80* | *31,0* |
| *Водяной пар* | *H*2 | *18,0156* | *0,768* | *374,2* | *218,5* | *324* |
| *Воздух сухой*1 | *-* | *28,96* | *1,2928* | *140,7* | *37,2* | *310* |
| *Гелий* | *Hе* | *4,002* | *0,1785* | *267,9* | *2,26* | *69,3* |
| *Закись азота* | *N*2 | *44,013* | *1,9775* | *36,5* | *71,7* | *450* |
| *Кислород* | 2 | *32,000* | *1,42896* | *118,8* | *49,7* | *430* |
| *Метан* | *СH*4 | *16,04* | *0,7168* | *82,5* | *45,7* | *162* |
| *Неон* | *Nе* | *20,183* | *0,8999* | *228,7* | *26,9* | *484* |
| *Окись азота* | *N* | *30,006* | *1,3402* | *92,9* | *64,6* | *520* |
| *Окись углерода* | *С* | *28,01* | *1,2500* | *140,2* | *34,5* | *301* |
| *Углекислый газ* | *С* 2 | *44,01* | *1,9768* | *31,0* | *73* | *460* |
| *Хлор* | *Сl*2 | *70,914* | *3,22* | *144* | *76,1* | *573* |

1 *Cостав воздуха по объему: 78,03% N*2*, 20,99% О*2*, 0,933% Ar, 0,03% СО*2*, 0,01% H*2*, 0,0018% Nе и др.*

2 *11ри давлении P* = 5*,*12 *атм (тройная точка).*

3 *Температура возгонки.*

## *ТенJuные нuстuннные 'азuн*

*Т а б л и ц а* *26*

*cp и Cp - удельная и молярная теплоемкости (даны в указанных интервалах температур), γ* = *cp /cv при 20* ◦*С, η - коэффициент динамической вязкости при 20* ◦*С, λ - теплопроводность при 0* ◦*С, β* = (1*/V* )(*∂V/∂T* )*P - температурный коэффициент объемного расширения*

*Раздел V*

*307*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Вещество* | *Формула* | *t,* ◦*С* | *cp,*  *Дж:*  *г*·*к* | *Cp,*  *Дж :*  *моль*·*к* | *γ* | *λ,*  10−2  *Вт*  *м*·*к* | *η,*  10−7  *кг*  *м*·*с* | *t,* ◦*С* | *β,*  10−3 *К*−1 |
| *Азот* | *N*2 | *0320* | *1,038* | *29,1* | *1,404* | *2,43* | *174* | *03100* | *3,671* |
| *Аммиак (пары)* | *NH*3 | *243200* | *2,244* | *38,1* | *1,34* | *2,18* | *97,0* | *-* | *-* |
| *Аргон* | *AI'* | *15* | *0,523* | *20,9* | *1,67* | *1,62* | *222* | *100* | *3,676* |
| *Ацетон (пары)* | *С*3 *H*6 | *263110* | *1,566* | *90,9* | *1,26* | *1,70* | *73,5* | *-* | *-* |
| *Водород* | *H*2 | *103200* | *14,273* | *28,8* | *1,41* | *16,84* | *88* | *100* | *3,679* |
| *Водяной пар*1 | *H*2 | *100* | *1,867* | *34,5* | *1,324* | *2,35* | *128* | *13120* | *4,187* |
| *Воздух сухой* | *-* | *03100* | *0,992* | *29,3* | *1,40* | *2,41* | *181* | *-* | *-* |
| *Гелий Закись азота* | *Hе*  *N*2 | −180  *163200* | *5,238*  *0,946* | *21,0*  *41,7* | *1,66*  *1,32* | *14,15*  *1,51* | *194*  *146* | *100*  *0* | *3,659*  *3,761* |
| *Кислород* | 2 | *133207* | *0,909* | *29,1* | *1,40* | *2,44* | *200* | *03100* | *3,67* |
| *Метан Окись азота* | *СH*4  *N* 2 | *183208*  *133172* | *2,483*  *0,967* | *39,8*  *29,0* | *1,31*  *1,40* | *3,02*  *2,38* | *109*  *188* | −50 ÷ +50  *0* | *3,580*  *3,677* |
| *Окись углерода* | *С* | *263198* | *1,038* | *28,5* | *1,40* | *2,32* | *177* | *03100* | *3,671* |
| *Сернистый газ* | *S* 2 | *163202* | *0,561* | *36,0* | *1,29* | *0,77* | *126* | *-* | *-* |
| *Углекислый газ* | *С* 2 | *15* | *0,846* | *37,1* | *1,30* | *1,45* | *144,8* | *03100* | *3,723* |
| *Хлор* | *Сl*2 | *133202* | *0,519* | *36,8* | *1,36* | *0,72* | *132* | *03100* | *3,830* |
| *Этилен* | *С*2 *H*4 | *153100* | *1,670* | *46,8* | *1,25* | *1,64* | *103* | *-* | *-* |

1 *λ даны при 100* ◦*С.*

*Т а б л и ц а* *27*

## *Внзкuсть 'азuн и нарuн нри разJичных темнературах*

*η, 10*−8 *кг/(м*·*с)*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t*   * *с* | *Азот N*2 | *Ар'он Ar* | *Водо- род Н*2 | *Вод}fной llар* | *ВоздYx* | *ГeJий Не* | *кисJо- род О*2 | *У'JeкисJый 'аз сО*2 |
| −*75*  −*50*  −*25*  *0* | *1285*  *1419*  *1542*  *1665* | *1585*  *1760*  *1930*  *2085* | *677*  *733*  *788*  *840* | *-*  *-*  *- 883* | *1312*  *1445*  *1582*  *1708* | *1526*  *1640*  *1750*  *1860* | *1452*  *1612*  *1753*  *1910* | *1007*  *1126*  *1247*  *1367* |
| *20* | *1766* | *2215* | *880* | *-* | *1812* | *1946* | *2026* | *1463* |
| *25* | *1778* | *2248* | *890* | *975* | *1840* | *1968* | *2052* | *1486* |
| *50* | *1883* | *2400* | *938* | *1065* | *1954* | *2065* | *2182* | *1607* |
| *75* | *1986* | *2550* | *985* | *1157* | *2068* | *2175* | *2310* | *1716* |
| *100* | *2086* | *2695* | *1033* | *1250* | *2180* | *2281* | *2437* | *1827* |

*Т а б л и ц а* *28*

## *ДанJение и нJuтнuсть насыщеннu'u нu,цннu'u нара* нри разJичных темнературах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t,*   * *C* | *P,*  *торр* | *ρ, г/м*3 | *t,*   * *C* | *P,*  *торр* | *ρ, г/м*3 | *t,*   * *C* | *P,*  *торр* | *ρ, г/м*3 |
| −30  −28  −26  −24  −22  −20  −18  −16  −14  −12  −10  −8  −6  −4 | *0,28*  *0,35*  *0,43*  *0,52*  *0,64*  *0,77*  *0,94*  *1,13*  *1,36*  *1,63*  *1,95*  *2,32*  *2,76*  *3,28* | *0,33*  *0,41*  *0,51*  *0,60*  *0,73*  *0,88*  *1,05*  *1,27*  *1,51*  *1,80*  *2,14*  *2,54*  *2,99*  *3,51* | −*2*  *0*  *2*  *4*  *6*  *8*  *10*  *12*  *14*  *16*  *18*  *20*  *22*  *24* | *3,88*  *4,58*  *5,29*  *6,10*  *7,01*  *8,05*  *9,21*  *10,52*  *11,99*  *13,63*  *15,48*  *17,54*  *19,83*  *22,38* | *4,13*  *4,84*  *5,60*  *6,40*  *7,3*  *8,3*  *9,4*  *10,7*  *12,1*  *13,6*  *15,4*  *17,3*  *19,4*  *21,8* | *26*  *28*  *30*  *32*  *34*  *36*  *38*  *40*  *50*  *60*  *70*  *80*  *90*  *100* | *25,21*  *28,35*  *31,82*  *35,66*  *39,90*  *44,56*  *49,69*  *55,32*  *92,5*  *149,4*  *233,7*  *355,1*  *525,8*  *760,0* | *24,4*  *27,2*  *30,3*  *33,9*  *37,6*  *41,8*  *46,3*  *51,2*  *83,0*  *130*  *198*  *293*  *424*  *598* |

*Т а б л и ц а* *29*

## *ЭДС термuнар нри разJичных темнературах*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *ЭДС,* | *мВ* | |  |
| *t,*   * *С* | *Платина - пла- тина+10% родия* | *Хромель - алюмель* | | *Железо - константан* | *Медь - константан* |
| *100* | *0,64* | *4,1* | | *5* | *4* |
| *200* | *1,44* | *8,1* | | *11* | *9* |
| *300* | *2,31* | *12,2* | | *16* | *15* |
| *400* | *3,25* | *16,4* | | *22* | *21* |
| *500* | *4,22* | *20,6* | | *27* |  |
| *600* | *5,23* | *24,9* | | *33* |  |
| *700* | *6,26* | *29,1* | | *39* |  |
| *800* | *7,34* | *33,3* | | *45* |  |
| *900* | *8,45* | *37,4* | | *52* |  |
| *1000* | *9,59* | *41,3* | | *58* |  |
| *1200* | *11,95* | *48,9* | |  |  |
| *1400* | *14,37* | *55,9* | |  |  |
| *1600* | *16,77* |  | |  |  |

*Т а б л и ц а* *30*

## *У,цеJьнuе сuнрuтинJение и темнературный кuэффициент* сuнрuтинJенин метаJJических нрuнuJuк (при 18 ◦*C)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Вещество* | *ρ,*  *10*−6 *Ом*·*см* | *α* · 104*, К*−1 |
| *Алюминий* | *3,21* | *38* |
| *Вольфрам* | *5,5* | *51* |
| *Железо (0,1% С)* | *12,0* | *62* |
| *Золото* | *2,42* | *40* |
| *Латунь* | *639* | *10* |
| *Манганин (3% Ni, 12% Mn, 85% Сu)* | *44,5* | *0,0230,5* |
| *Медь* | *1,78* | *42,8* |
| *Никель* | *11,8* | *27* |
| *Константан (40% Ni, 1,2% Mn, 58,8% Сu)*  *Нихром (67,5% Ni, 1,5% Mn, 16% Fе, 15% СI')* | *49,0*  *110* | −0*,*4 ÷ 0*,*1  *1,7* |
| *Олово* | *11,3* | *45* |
| *Платина* | *11,0* | *38* |
| *Свинец* | *20,8* | *43* |
| *Серебро* | *1,66* | *40* |
| *Цинк* | *6,1* | *37* |

*Т а б л и ц а* *31*

## *Рабuта ныхu,ца эJектрuнuн*

|  |  |
| --- | --- |
| *Металл* | *A, эВ* |
| *Алюминий* | *4,25* |
| *Барий* | *2,49* |
| *Вольфрам* | *4,54* |
| *Железо* | *4,31* |
| *Медь* | *4,40* |
| *Никель* | *4,50* |
| *Окись бария* | *1,1* |
| *(тонкая пленка на вольфраме)* |  |
| *Олово* | *4,38* |
| *Платина* | *5,32* |
| *Ртуть* | *4,52* |
| *Серебро* | *4,3* |
| *Цезий* | *1,81* |
| *Цинк* | *4,24* |

*СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

*1. Лабораторные занятия по физике / Под ред. Л.Л. Гольдина. - М.:* Наука, 1983.

*2. Табличы физических величин / Под ред. И.К. Кикоина. - М.: Атом-* издат, 1976.

*3. Физи'Ческие величины / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. -* М.: Энергоатомиздат, 1991.

*4. L n olt Н , B n ltten R Zah enwerte nd F nktiоnen a s Physik, Chemie,* Аstrоnоmie nd тeсhnik. - Ber in: Sрringer, 1960.

*5. CODAТA Reсоmmended Va es о the F ndamenta Physiсa Cоnstants: 1998. (*[*http://physics.nist.gov/constants)*](http://physics.nist.gov/constants))

*ОГЛАВЛЕНИЕ*

[*ПРЕДИСЛОВИЕ* *3*](#_TOC_250002)

[*ВВЕДЕНИЕ* *5*](#_TOC_250001)

*Р а з д е л I. Измеренин н физике* *9*

[*Эталоны физических величин* *9*](#_TOC_250000)

*Числовое значение физической величины* *9*

*Размерность* *10*

*дини ы углов* *13*

*Базисные величины системы СИ* *14*

*Измерения и обработка результатов измерений* *17*

*Измерения и их погрешности* *17*

*Систематические и случайные погрешности* *18*

*Систематические погрешности* *20*

*Случайные погрешности* *21*

*Погрешность среднего арифметического результата* измерения *25*

*Сложение случайных и систематических погрешностей* *26*

*Обработка результатов при косвенных измерениях* *27*

*Рекомендации по выполнению лабораторных работ . 29* Подготовка к работе *30*

*Начало работы* *31*

*Проведение измерений* *31*

*Расчёты, анализ и представление результатов* *33*

*Построение и обработка графиков* *34*

*Графический метод обработки экспериментальных данных* *36*

*Метод наименьших квадратов* *39*

*Работа 1.1.1. Определение систематических и случайных* погрешностей при измерении удельного

*сопротивления нихромовой проволоки* *42*

*Образец отчета о выполнении работы 1.1.1* *45*

*Работа 1.1.2. Измерение коэффициента линейного расширения* стержня с помощью микроскопа *51*

*Образец отчета о выполнении работы 1.1.2* *58*

*Работа 1.1.3. Статистическая обработка результатов*

*многократных измерений* *61*

*Образец отчета о выполнении работы 1.1.3* *63*

*Работа 1.1.4. Измерение интенсивности радиационного фона* *67*

*Теоретическая справка о природе космических лучей* *67*

*Устройство счетчика Гейгера-Мюллера* *70*

*Описание эксперимента* *72*

*Образец отчета о выполнении работы 1.1.4* *76*

*Распределение Пуассона* *81*

*Распределение Гаусса* *84*

*Работа 1.1.5. Исследование упругих столкновений протонов*

*с электронами* *86*

*Образец отчета о выполнении работы 1.1.5* *98*

*Работа 1.1.6. Изучение электронного осциллографа* *102*

*Р а з д е л II. Механика тнер,цu'u теJа* *119*

*Движение системы материальных точек* *119*

*Движение твёрдого тела* *126*

*Векторы и тензоры* *129*

*Работа 1.2.1. Определение скорости полета пули при помощи* баллистического маятника *136*

*I. Метод баллистического маятника, совершающего* поступательное движение *138*

*II. Метод крутильного баллистического маятника* *141*

*Работа 1.2.2. Экспериментальная проверка закона вращательного* движения на крестообразном маятнике *145*

*Работа 1.2.3. Определение моментов инерции твердых тел*

*с помощью трифилярного подвеса* *149*

*Работа 1.2.4. Определение главных моментов инерции твердых*

*тел с помощью крутильных колебаний* *155*

*Работа 1.2.5. Исследование вынужденной регулярной прецессии* гироскопа *160*

*314 ОГЛАВЛЕНИЕ*

*Р а з д е л III. Механика снJuшных сре,ц* *168*

*Деформа ии и внутренние напряжения в деформируемом* твердом теле *168*

*Модули упругости* *171*

*Деформа ия и напряжение в бруске* *172*

*Деформа ия всестороннего сжатия* *174*

*Деформа ия одноосного растяжения* *175*

*Взаимозависимость модулей упругости* *176*

*Закон Паскаля* *176*

*Уравнение Бернулли* *177*

*Формула Пуазейля* *180*

*Работа 1.3.1. Определение модуля Юнга на основе исследования* деформаций растяжения и изгиба *183*

*I. Определение модуля Юнга по измерениям* растяжения проволоки *184*

*II. Определение модуля Юнга по измерениям*

*изгиба балки* *186*

*Работа 1.3.2. Определение модуля кручения* *193*

*I. Определение модуля кручения стержня*

*статическим методом* *195*

*II. Определение модуля сдвига при помощи* крутильных колебаний *197*

*Работа 1.3.3. Определение вязкости воздуха по скорости течения* через тонкие трубки *199*

*Работа 1.3.4. Исследование стационарного потока жидкости*

*в трубе* *206*

*Р а з д е л IV. Механические кuJебанин и нuJны* *213*

*Свободные колебания гармонического ос иллятора* *213*

*Фазовый портрет гармонического ос иллятора* *217*

*Свободные колебания ос иллятора с вязким трением* *218*

*Физический маятник* *220*

*Вынужденные колебания ос иллятора с вязким трением* *223*

*Свободные колебания связанных маятников* *228*

*Плоская ста ионарная бегущая волна* *233*

*Плоская синусоидальная бегущая волна* *234*

*Стоячие волны* *235*

*Волновое уравнение* *236*

*Продольные волны в деформируемом твердом теле* *236*

*Плотность потока энергии* *239*

*Поперечные волны на струне* *241*

*Собственные колебания струны* *242*

*Прохождение продольной волны через грани у двух сред . 243 Работа 1.4.1. Изучение физического маятника* *246*

*Работа 1.4.2. Определение ускорения свободного падения*

*при помощи оборотного маятника* *250*

*Работа 1.4.3. Исследование нелинейных колебаний* длиннопериодного маятника *259*

*Работа 1.4.4. Исследование свободных колебаний*

*связанных маятников* *265*

*Работа 1.4.5. Изучение колебаний струны* *270*

*Работа 1.4.6. Измерение скорости ультразвука в жидкости*

*с помощью ультразвукового интерферометра* *274*

*Работа 1.4.7. Определение упругих констант жидких и твердых*

*тел по скорости распространения ультразвука* *280*

*Р а з д е л V. ТабJицы* *286*

*Учебное издание*

*Г.ладун Анатолий Део.мидови'Ч А.лександров Д.митрий Анатолъеви'Ч Игошин Федор Федорови'Ч Коротков Павел Федорови'Ч Кор.явов Влади.мир Павлови'Ч Ов'Чинников Алексей Петрови'Ч Самарский I0рий Александрови'Ч Теврюков Алексей Андрееви'Ч Фрейберг Геннадий Николаеви'Ч*

## *ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ* ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

*Т. 1. М е х а н и к а*

*Компьютерная верстка Д.А. Александров, П.В. Попов Редактор И.А. Волкова. Корректор О.П. Котова*

*Рисунки: Д.А. Александров, Д.Е. Маев, А.Е. Наумушкин, К.А. Ов'Чинников, В.В. Усков, Г.Н. Фрейберг*

*11одписано в печать 16.04.2012. Формат* 60 × 901*/*16*. .1умага офсетная. 11ечать офсетная. Усл. печ. л. 19,7 . Уч.-изд. л. 20,1. Тираж 1000 экз. Заказ №*

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования*

*Mосковский физико-технический институт (государственный университет) 141700, Mосковская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9*

*Oтпечатано в полном соответствии*

*с качеством предоставленных диапозитивов в OOO 11ечатный салон <Шанс»*

*12 412, Mосква, ул. Ижорская, д. 13, стр. 2*